

24 Febbraio 2023
Giuseppe Anichini
Fabio Brunelli
**“Il Gioco nella Didattica
della Matematica”**
**Laboratorio per la
Scuola Secondaria di II
Grado**
15:30 – 17:30



La nostra scaletta di oggi:

Un gioco in ambito numeri

Un gioco in ambito figure

Un percorso probabilistico (Misconcezioni, Spazio degli eventi, Probabilità condizionata)

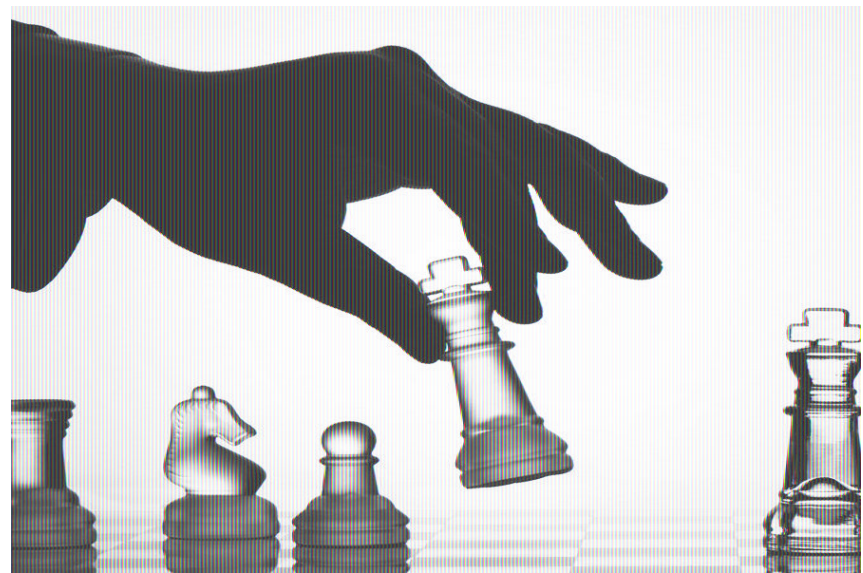
Le nostre parole chiave sono:

Laboratorio di Matematica

Problem Solving

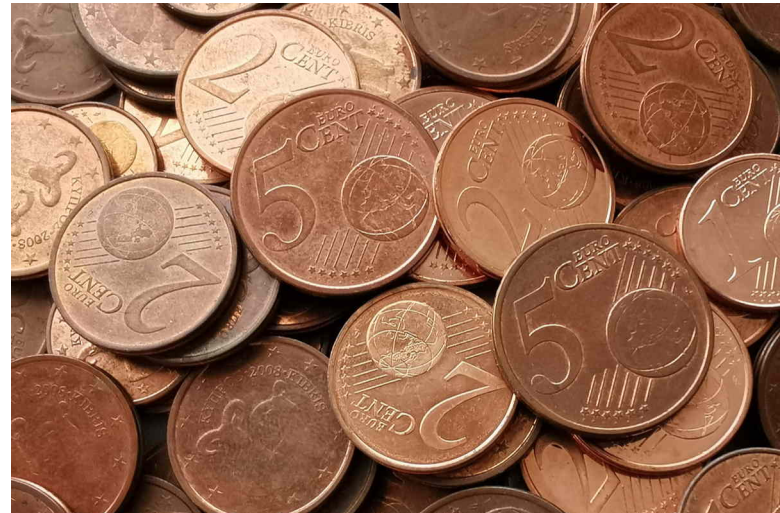
Argomentare

Strategia



Chi arriva (esatto) a 100 vince!

- Si hanno monete da 1 cent, 2 cent, 5 cent a volontà ...
- Ogni volta si mette sul tavolo un valore da 1 a 10 in centesimi ...
- **Quale strategia per vincere?**

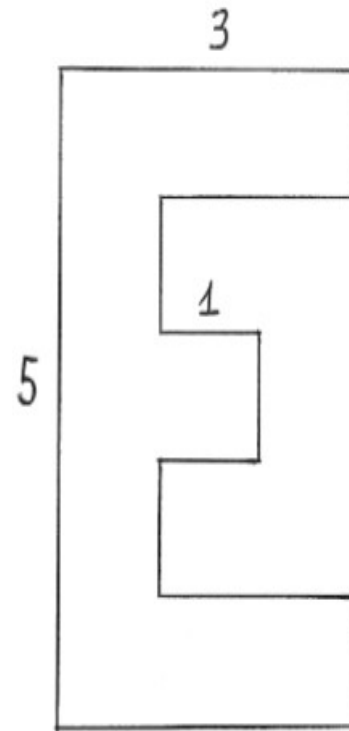


Si può trasformare
in un quadrato?

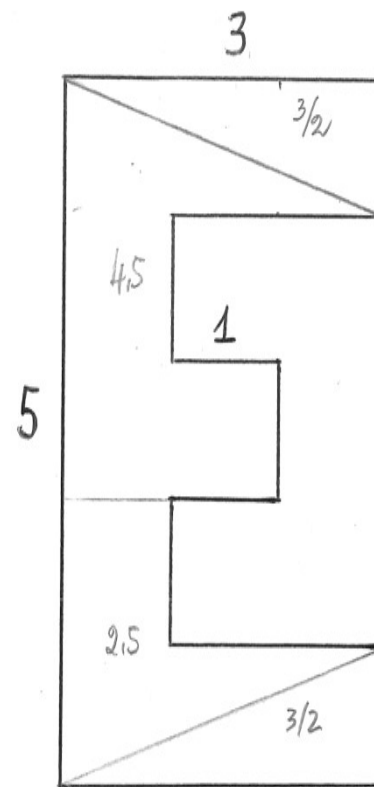
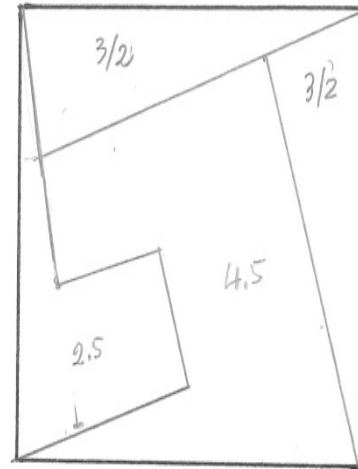
Un problema di geometria

Questa figura si può trasformare
in un quadrato?

Quale strategia?



Soluzione



Prima Parte
Il Pensiero Magico, le misconcezioni, le false intuizioni e le
credenze ingenuie



Iniziamo con una
via di mezzo tra un
gioco e un
esperimento



Lanci veri e lanci simulati

Scrivete i risultati di venti lanci di una moneta: una decina è simulata, immaginata da voi, e la dovrete scrivere subito in una riga a caso della tabella, non necessariamente nella prima.

La seconda decina di lanci la dovrete effettuare, lanciando voi una moneta dieci volte.

I risultati di questa seconda decina di lanci “veri” li scriverete nella riga rimanente.

Non dite a nessuno qual è la riga di lanci “veri” e quale riga è quella dei lanci “simulati”.

Proveremo ad indovinarla noi!

Due serie di dieci lanci ciascuna, ma una sola effettivamente realizzata, l'altra è solo “immaginata”, “simulata”...

Come fare a indovinare quella vera e quella simulata?
Qui ci vuole un vero mago ... !



Un quesito di Paolo Boero (Università di Genova):

Abbiamo due serie di 2000 lanci di una moneta non truccata.

All'inizio della prima serie di 2000 lanci per 9 volte di seguito è venuta “testa”; alla fine, la frequenza relativa di “testa” è stata di 0,5025.

Nella successiva serie di lanci, di cui non sappiamo nulla, alla fine, la frequenza relativa di “testa” è stata di 0,502.

Domanda:

Come spiegheresti che, nonostante nella prima serie di lanci si siano ottenute, all'inizio, 9 “teste” di seguito, alla fine delle due serie la frequenza è sostanzialmente la stessa?



Il 46% degli studenti universitari intervistati (ricerca di Paolo Boero, nel III anno del corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria di Genova, di cui oltre un terzo ha dichiarato di avere studiato probabilità nelle scuole secondarie) ha risposto erroneamente che ciò dipende dal fatto che, nella prima serie, nei lanci successivi ai primi 10, sono uscite molte più croci: **“Per compensare quanto accaduto nei primi 10 lanci”**, **“Perché sennò il caso non avrebbe rispettato la legge dei grandi numeri”**!



Da fare in classe:

Istruttivo è realizzare con l'aiuto degli allievi delle tabelle con un grande numero di lanci consecutivi di una moneta. Nei gradi scolastici più bassi è sufficiente discutere riguardo a gruppi di teste e di croci consecutivi.

Con allievi un po' più grandi si può calcolare (con l'aiuto della calcolatrice):

- a) come varia la frequenza di testa?
- b) Come varia la differenza tra il numero delle teste e il numero delle croci?



Nel gioco del **Superenalotto**, in cui si vince se si indovinano 6 numeri tra 1 e 90 successivamente estratti, conviene di più giocare la sestina (1, 2, 3, 4, 5, 6), oppure la sestina (7, 18, 32, 51, 67, 83) oppure è indifferente? (Giustificare la risposta)

A) è più difficile che escano a caso sei numeri consecutivi

B) il caso si distribuisce su tutti i novanta numeri e non solo sui primi sei

C) con la prima sestina è come se il caso si ostinasse a far venire fuori i numeri piccoli e allora il caso non sarebbe più casuale



Nel gioco del **Superenalotto**, in cui si vince se si indovinano 6 numeri tra 1 e 90 successivamente estratti, conviene di più giocare la sestina (1, 2, 3, 4, 5, 6), oppure la sestina (7, 18, 32, 51, 67, 83) oppure è indifferente? Giustificare la risposta.

A) è più difficile che escano a caso sei numeri consecutivi

B) il caso si distribuisce su tutti i novanta numeri e non solo sui primi sei

C) con la prima sestina è come se il caso si ostinasse a far venire fuori i numeri piccoli e allora il caso non sarebbe più casuale

Il 38% di un gruppo di studenti universitari intervistati ha risposto che è più probabile la seconda sestina



La signora Frida, mia vicina di casa (operaia in pensione), qualche giorno fa ha vinto al Superenalotto!
L'ho vista veramente felice!



La signora Frida, mia vicina di casa, qualche giorno fa ha vinto al Superenalotto ed era molto felice!
Ha speso 2 euro e ne ha incassati 5.
Il gioco sarebbe stato equo se ne avesse incassati
 $2 \times 22 = 44$ euro ...

Punti 2

$$\frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{84}{4}}{\binom{90}{6}} = \frac{\frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot \frac{84!}{4! \cdot 80!}}{\frac{90!}{6! \cdot 84!}} = \frac{15 \cdot 1.929.501}{622.614.630} \approx \frac{1}{22}$$



Questo è un quesito INVALSI per la scuola primaria (Grado 5, anno 2018), ma le misconcezioni in probabilità non hanno età!

M1805D24A0 - M1805D24B0

D24. Alcuni bambini giocano con un dado a sei facce non truccato. Vince chi ha scommesso sul numero che è uscito più volte dopo 20 lanci. Dopo ogni lancio, su una tabella, mettono una crocetta (X) vicino al numero che è uscito.

Dopo 17 lanci la situazione è la seguente:



NUMERO	
1	X X X
2	X X
3	X X X
4	X X X X X
5	X
6	X X X

La prima domanda è a risposta aperta argomentata:

a. Adele dice: "È inutile continuare a giocare, tanto chi ha scommesso sul 4 ha già vinto".

Adele ha ragione? Scegli una delle risposte e completa la frase.

Adele ha ragione perché

.....

.....

Adele non ha ragione perché

.....

.....

Adele non ha ragione perché ... L' alunno deve fare riferimento al fatto che, nel caso in cui nei tre lanci successivi uscisse sempre il numero 3, o il numero 1, o il numero 6, il 4 non sarebbe vincente.

Risposte corrette 23%

Risposte mancate 10%

Altre non valide 67%

a. Adele dice: "È inutile continuare a giocare, tanto chi ha scommesso sul 4 ha già vinto".

Adele ha ragione? Scegli una delle risposte e completa la frase.

Adele ha ragione perché

.....

.....

Adele non ha ragione perché

.....

.....

La seconda domanda è a risposta multipla chiusa:

b. Al diciottesimo lancio del dado quale numero ha più probabilità di uscire?

- A. Nessuno perché in ogni lancio tutti i numeri hanno la stessa probabilità di uscire
- B. Il 4 perché è uscito più volte nei lanci precedenti
- C. Il 3 perché è un numero fortunato
- D. Il 5 perché è uscito meno volte nei lanci precedenti

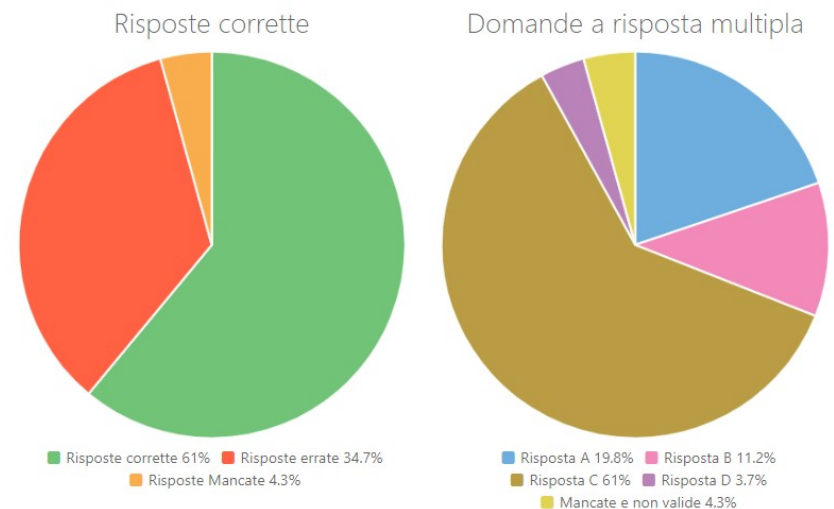
NUMERO	
1	X X X
2	X X
3	X X X
4	X X X X X
5	X
6	X X X

La seconda domanda è andata un po' meglio: risposte corrette 61%

b. Al diciottesimo lancio del dado quale numero ha più probabilità di uscire?

- A. Il 4 perché è uscito più volte nei lanci precedenti **19,8%**
- B. Il 5 perché è uscito meno volte nei lanci precedenti **11,2%**
- C. Nessuno perché in ogni lancio tutti i numeri hanno la stessa probabilità di uscire
- D. Il 3 perché è un numero fortunato **3,7%**

Risultati nazionali



Questi siti sono frequentati da adulti. Trattano di numeri “frequenti” e “ritardatari”!



AREA RIVENDITORI AREA RIVENDITORI ONLINE

[GIOCO DEL LOTTO](#)

[10eLOTTO](#)

[MILLIONDAY](#)



[Estrazioni Lotto](#)

[Il Lotto in diretta](#)

[Gioca online](#)

[Simbolotto](#)

[App My Lotteries](#)

[Statistiche Lotto](#)

[La Smorfia](#)

[Eventi Lotto](#)

[Come e dove giocare](#)

[Regolamenti Lotto](#)

[Comunicazione Estrazioni Lotto](#)

[Vincite Lotto](#)

[Numeri ritardatari Lotto](#)

[Numeri frequenti Lotto](#)

[Estratto Determinato Massimi Ritardatari](#)

[Ambi](#)

[Numeri spia Lotto](#)

[Top 10 numeri ritardatari](#)

[Sistemi Lotto](#)

Ambi ritardatari

TOP 20 AMBI FREQUENTI

TOP 3 AMBI RITARDATARI

COPPIE DI AMBO

SERIE CLASSICHE

STATISTICHE PER RUOTA

I tre ambi che mancano da più estrazioni, per ciascuna ruota (esclusa la ruota "tutte").

Bari		Cagliari		Firenze		Genova		Milano		Napoli		Palermo		Roma		Torino	
6-45	3821	12-35	2726	3-77	3499	18-63	3319	34-64	3486	5-28	3082	58-80	4535	16-42	4271	27-78	3329
18-33	3046	14-75	2725	50-57	3409	45-52	3201	2-31	3438	1-63	2973	54-82	4493	76-82	3121	16-83	3035

Seconda Parte

Dopo il “Pensiero Magico” un altro aspetto critico del calcolo delle probabilità è lo Spazio degli Eventi, uno spazio veramente misterioso!



Il caso più semplice di spazio degli eventi complicato è il passaggio da una a due monete



CoolClips.com

Con giovani studenti, ma anche con insegnanti nei corsi di formazione, dopo il caso di una moneta passo al caso delle due monete. Faccio finta di non ricordarmi: Cosa può accadere lanciando due monete? Cosa ne dite?

1. Due casi: o due teste o due croci! Molti fanno cenno di sì. Io aspetto finché qualcuno obietta ...



Con giovani studenti, ma anche con insegnanti nei corsi di formazione, dopo il caso di una moneta passo a due monete.

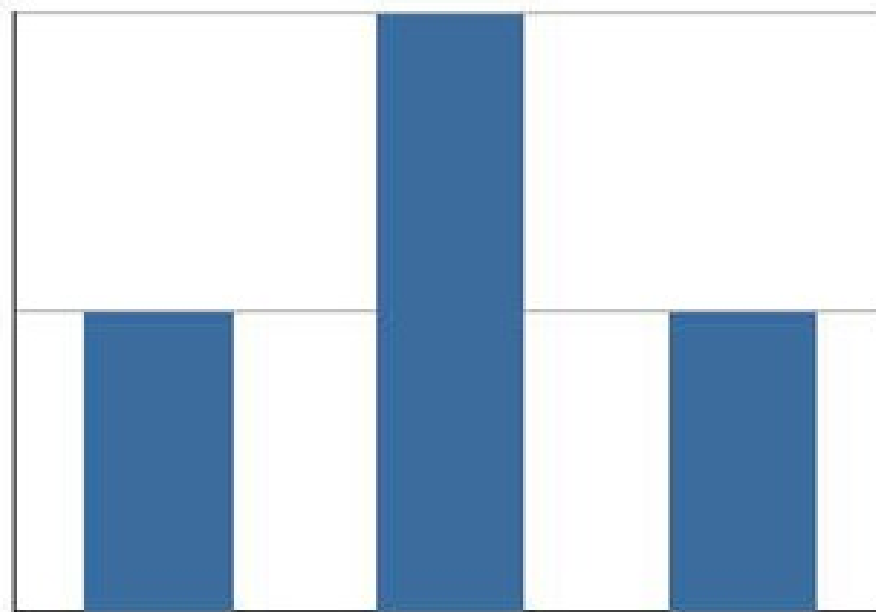
Faccio finta di non ricordarmi: Cosa può accadere lanciando due monete? Cosa ne dite?

1. Due casi: o due teste o due croci! Molti fanno cenno di sì. Io aspetto finché qualcuno obietta ...
2. A no, scusate, i casi sono tre, c'è anche il risultato misto, una testa e una croce!
3. Provando a lanciare due monete e registrando i risultati si scopre che i casi in realtà sono quattro ...

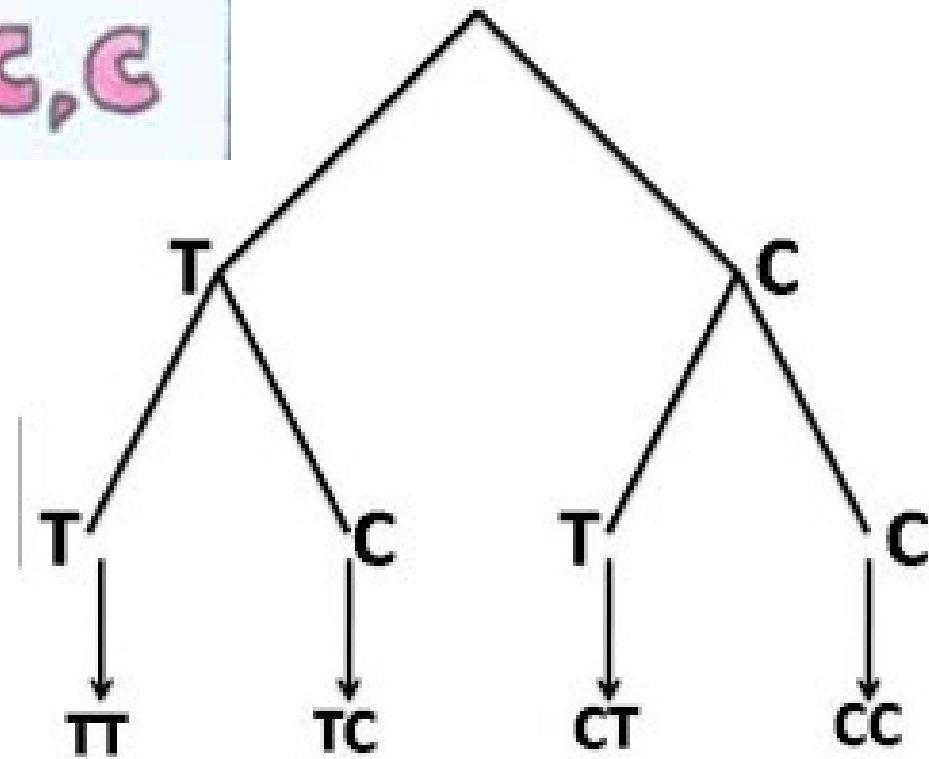


Provando a lanciare due monete molte volte e registrando i risultati si scopre che i casi in realtà sono quattro ... e il caso “misto” ha probabilità doppia degli altri due!

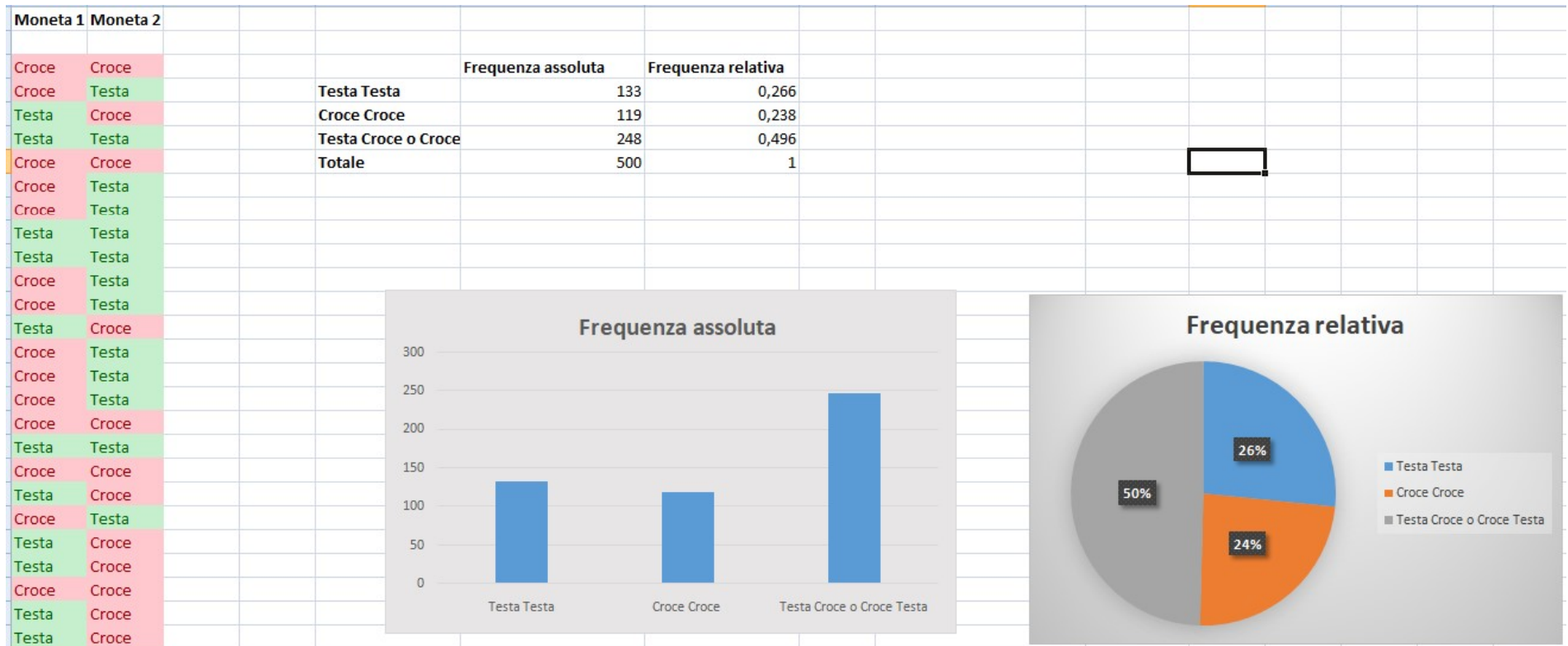
Come spiegarlo? Come visualizzarlo?



1^{a}M. \ 2^{a}M.	T	C
T	T,T	T,C
C	C,T	C,C



Tutte queste cose si possono fare lanciando materialmente monete e dadi e registrando i risultati con foglio e matita, lavagna e gesso, pennarello e cartelloni
 Ma anche oggi con un foglio elettronico



Grado 8 – anno 2012

Immagina di lanciare prima una moneta e poi un dado.

a. Completa la seguente tabella che riassume tutti i casi che possono verificarsi (alcune caselle sono già compilate).

b. La probabilità che escano una croce e un numero dispari è:

E19. Immagina di lanciare prima una moneta e poi un dado.

a. Completa la seguente tabella che riassume tutti i casi che possono verificarsi (alcune caselle sono già compilate).

	FACCE DEL DADO					
	1	2	3	4	5	6
Testa (T)	T ; 1	T ; 5
Croce (C)	C ; 1	C ; 3

b. La probabilità che escano una croce e un numero dispari è

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{3}{12}$

C. $\frac{3}{8}$

D. $\frac{2}{12}$

- a. Completa la seguente tabella che riassume tutti i casi che possono verificarsi (alcune caselle sono già compilate).

	FACCE DEL DADO					
	1	2	3	4	5	6
Testa (T)	T ; 1	T ; 5
Croce (C)	C ; 1	C ; 3

Le risposte corrette al quesito A sono quasi 80%, errate solo il 6%.

- b. La probabilità che escano una croce e un numero dispari è

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{3}{12}$

C. $\frac{3}{8}$

D. $\frac{2}{12}$

a. Completa la seguente tabella che riassume tutti i casi che possono verificarsi (alcune caselle sono già compilate).

	FACCE DEL DADO					
	1	2	3	4	5	6
Testa (T)	T; 1	T; 5
Croce (C)	C; 1	C; 3

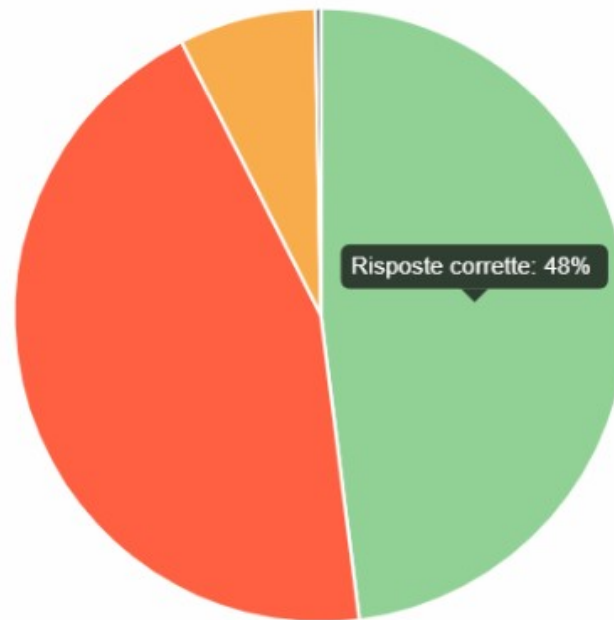
Le risposte corrette al quesito A sono quasi 80%, errate solo il 6%.

In teoria, chi risponde bene al primo quesito dovrebbe poter rispondere bene anche al secondo.

b. La probabilità che escano una croce e un numero dispari è

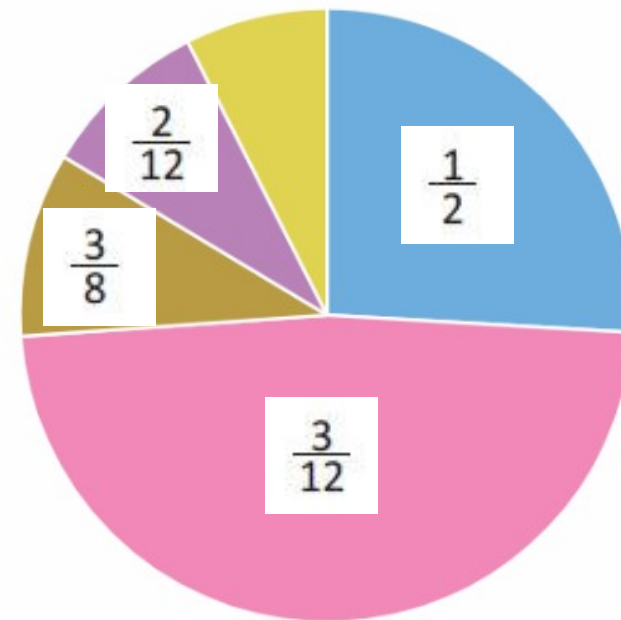
- A. $\frac{1}{2}$
- B. $\frac{3}{12}$
- C. $\frac{3}{8}$
- D. $\frac{2}{12}$

Risposte corrette



■ Risposte corrette 48%
 ■ Risposte errate 44.5%
■ Risposte Mancate 7.2%
 ■ Altre non valide. 0.3%

Domande a risposta multipla



■ Risposta A 25.9%
 ■ Risposta B 48%
■ Risposta C 9.7%
 ■ Risposta D 8.9%
■ Mancate e non valide 7.5%

Togliamo il re e l'asso da queste carte per averne solo undici. Estraiamo una carta più volte. Cosa accade?



Facciamo un gioco:

Lanciamo due dadi e sommiamo i risultati: otteniamo gli undici numeri da 2 a 12.

Se esce 2, 3, 4, 10, 11, 12 (sei risultati) avete vinto voi!

Se esce 5, 6, 7, 8, 9 (solo cinque risultati) ho vinto io!



Risultati del lancio di due dadi

2	(1;1)
3	(1;2) (2;1)
4	(1;3) (3;1) (2;2)
5	(1;4) (4;1) (2;3) (3;2)
6	(1;5) (5;1) (2;4) (4;2) (3;3)
7	(1;6) (6;1) (2;5) (5;2) (3;4) (4;3)
8	(2;6) (6;2) (3;5) (5;3) (4;4)
9	(3;6) (6;3) (4;5) (5;4)
10	(4;6) (6;4) (5;5)
11	(5;6) (6;5)
12	(6;6)

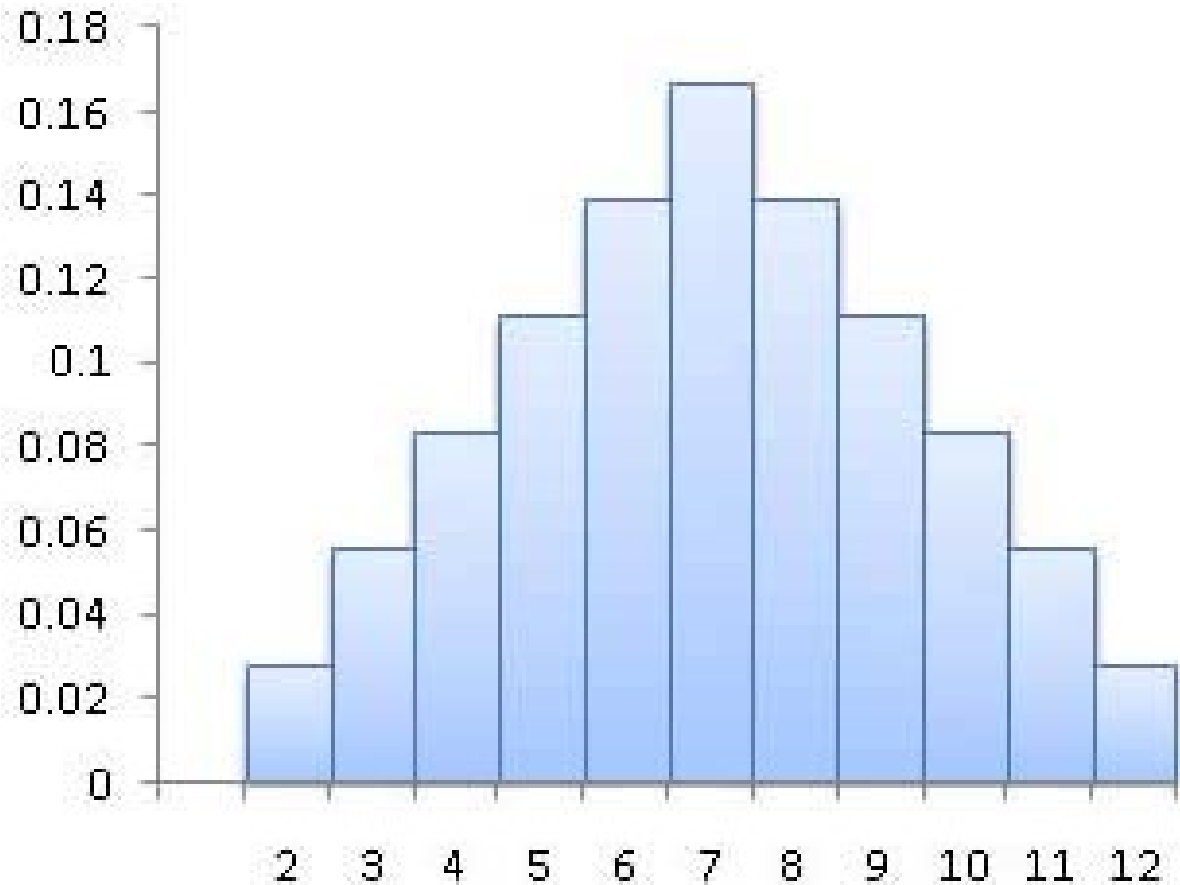
Il gioco non è equo!

In realtà voi avreste 12 esiti favorevoli su 36

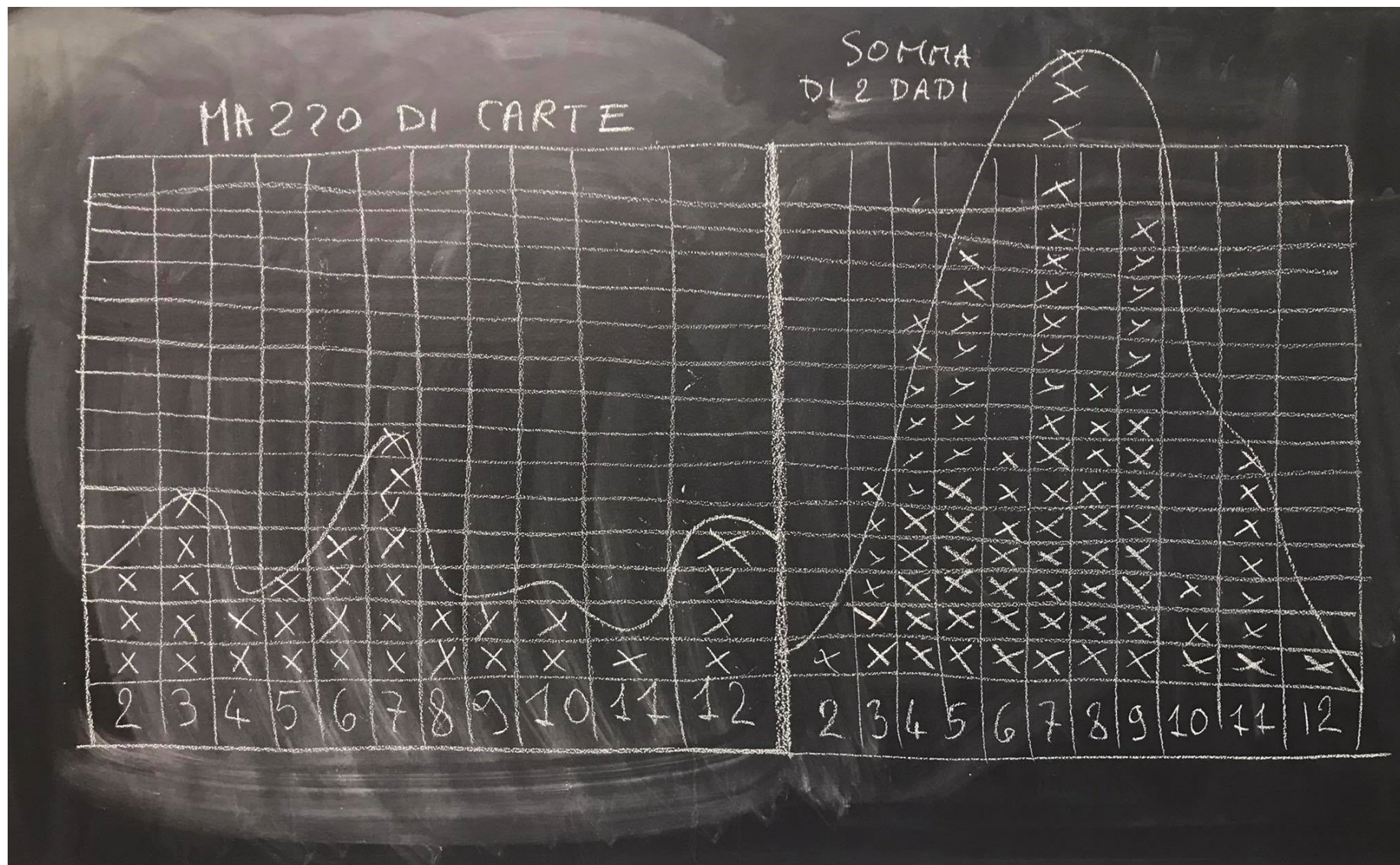
$p = 1/3 = 0,33\dots$

Io avrei 24 risultati favorevoli su 36

$p = 2/3 = 0,66\dots$



Ecco i risultati ottenuti in un corso di formazione:



La Storia della Matematica?

Non **finestra sul passato**, ma **specchio** in cui guardare noi stessi e i nostri alunni nel presente

Non **erudizione**, ma **lente di ingrandimento** utile per vedere meglio le nostre difficoltà nell'insegnamento e le difficoltà dei nostri allievi nell'apprendimento



Dante Alighieri (XIV sec.) fa un riferimento ad un gioco d'azzardo frequente nella strade di Firenze (anche se proibito): Il gioco della zara (lancio di tre dadi), Canto VI dell'Inferno (vv. 1-12):

*“Quando si parte il gioco de la zara,
colui che perde si riman dolente,
repetendo le volte, e tristo impara;
con l'altro se ne va tutta la gente;
qual va dinanzi, e qual di dietro il prende,
e qual dallato li si reca a mente;
el non s'arresta, e questo e quello intende;
a cui porge la man, più non fa pressa;
e così da la calca si difende.
Tal era io in quella turba spessa
volgendo a loro, e qua e là, la faccia,
e promettendo mi sciogliea da essa.”*



Nel libro “Sopra le scoperte dei dadi”, Galileo Galilei (1596), su richiesta del Granduca di Toscana, calcola la probabilità che la somma delle facce di 3 dadi sia uguale ad un certo numero k . Il nome del gioco era “Passa dieci”.



Problema 3: Lancio di tre dadi

s	addendi	totale modi	
3	(1,1,1)	1	1
4	(1,1,2)	3	3
5	(1,1,3) (1,2,2)	3, 3	6
6	(1,1,4) (1,2,3) (2,2,2)	3, 6, 1	10
7	(1,1,5) (1,2,4) (1,3,3) (2,2,3)	3, 6, 3, 3	15
8	(1,1,6) (1,2,5) (1,3,4) (2,2,4) (2,3,3)	3, 6, 6, 3, 3	21
9	(1,2,6) (1,3,5) (1,4,4) (2,3,4) (2,5,2) (3,3,3)	6, 6, 3, 6, 3, 1	25
10	(1,3,6) (1,4,5) (2,3,5) (2,4,4) (2,6,2) (3,3,4)	6, 6, 6, 3, 3, 3	27
11		6, 6, 6, 3, 3, 3	27
12		6, 6, 3, 6, 3, 1	25
13		3, 6, 6, 3, 3	21
14		3, 6, 3, 3	15
15		3, 6, 1	10
16		3, 3	6
17		3	3
18		1	1

**ottenibili
per
simmetria**

Totale

216

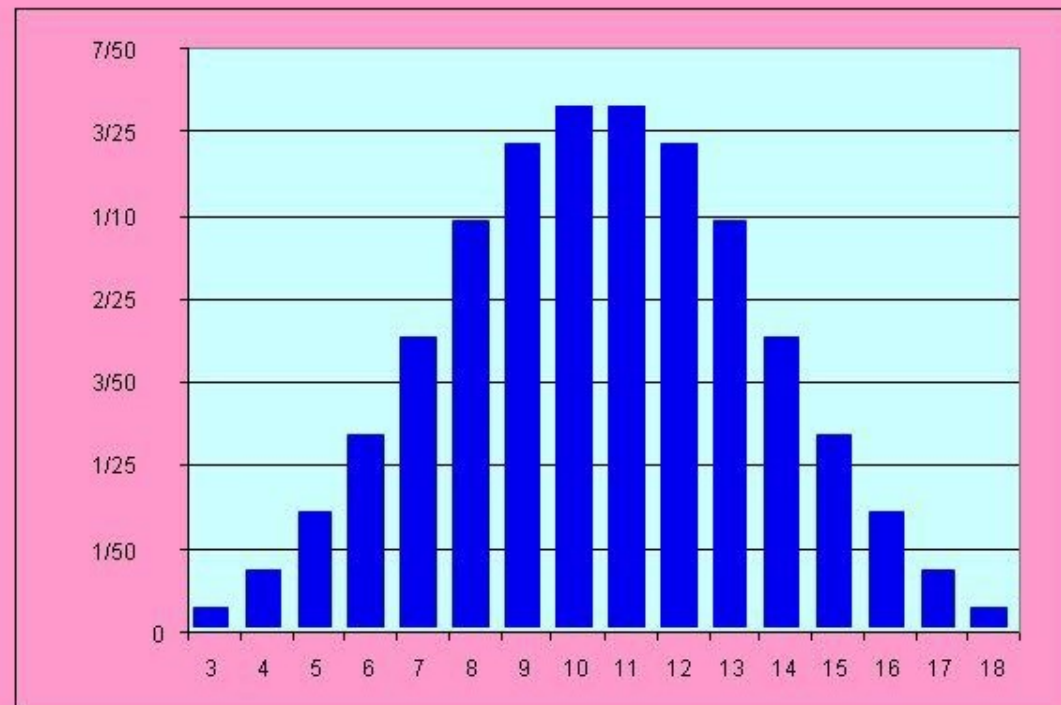
Problema 3: Lancio di tre dadi

Risultati possibili e probabilità associate:

3	4	5	6	7	8	9	10
$1/216$	$3/216$	$6/216$	$10/216$	$15/216$	$21/216$	$25/216$	$27/216$
11	12	13	14	15	16	17	18
$1/216$	$3/216$	$6/216$	$10/216$	$15/216$	$21/216$	$25/216$	$27/216$

La somma
delle
probabilità è
uguale a 1.

Istogramma
della
distribuzione:



**Vuoi cambiare la tua vita
con un colpo di fortuna?**

Vinci per la vita
WinforLife!
Spensierati e sistemati.

WIN FOR LIFE CON TUTTE LE SUE MODALITÀ
DI GIOCO HA DISTRIBUITO **OLTRE 400 RENDITE!**

Vinci per la vita
WinforLife!

il **Gioco della Rendita**

VINCI FINO A
3.000€
AL MESE PER
20 ANNI

CLASSICO SCEGLI 10 NUMERI SU 20.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

SCEGLI QUI IL TUO numerone

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

SCEGLI LA TUA GIOCATÀ

<input type="radio"/> 1€ Vinci con 10+1, 10, 9+1, 9, 8+1, 7+1, 6, 7 punti.	<input type="radio"/> 2€ Vinci con 10+1, 10, 9+1, 9, 8+1, 7+1, 6, 7 e anche con 3, 2, 3+1, 2+1, 1, 1+1, 0, 0+1 punti.
--	--

Abbonamento per n. concorsi

2
3
4
5
6
7
8
9
10



IL GIOCO È VIETATO AI MINORI
E PUÒ CAUSARE DIPENDENZA PATOLOGICA

Vuoi cambiare la tua vita con un colpo di fortuna?



supporto premium | pagamenti sicuri |



GDPR Compliance
Massafra's commitment to protecting customer data

**€7 GRATIS
+100%
1° BONUS DI DEPOSITO**

REGISTRATI E GIOCA

The advertisement features a vibrant blue background with a smiling strawberry character on the left holding a smartphone displaying the 'Fruity Wins' slot game. A yellow lemon character is also present. On the right, a large slot machine screen shows a winning combination of symbols: a scatter symbol, a purple 'Q', a yellow lemon, a green watermelon slice, and a green 'J'. Below the screen, several gold Euro coins are shown falling. The overall theme is colorful and celebratory, with various fruit and game symbols scattered throughout.

Terza Parte

La Probabilità Condizionata

La probabilità condizionata e il teorema di Bayes



«La probabilità è la miglior guida nella vita».

Marco Tullio Cicerone

«Il concetto di probabilità è il più importante di tutta la scienza moderna, soprattutto perché nessuno ha la più pallida idea del suo significato».

Bertrand Russell

Grazie per l'attenzione!



Fabio Brunelli brunelli1950@gmail.com
Giuseppe Anichini giuseppe.anichini@unifi.it