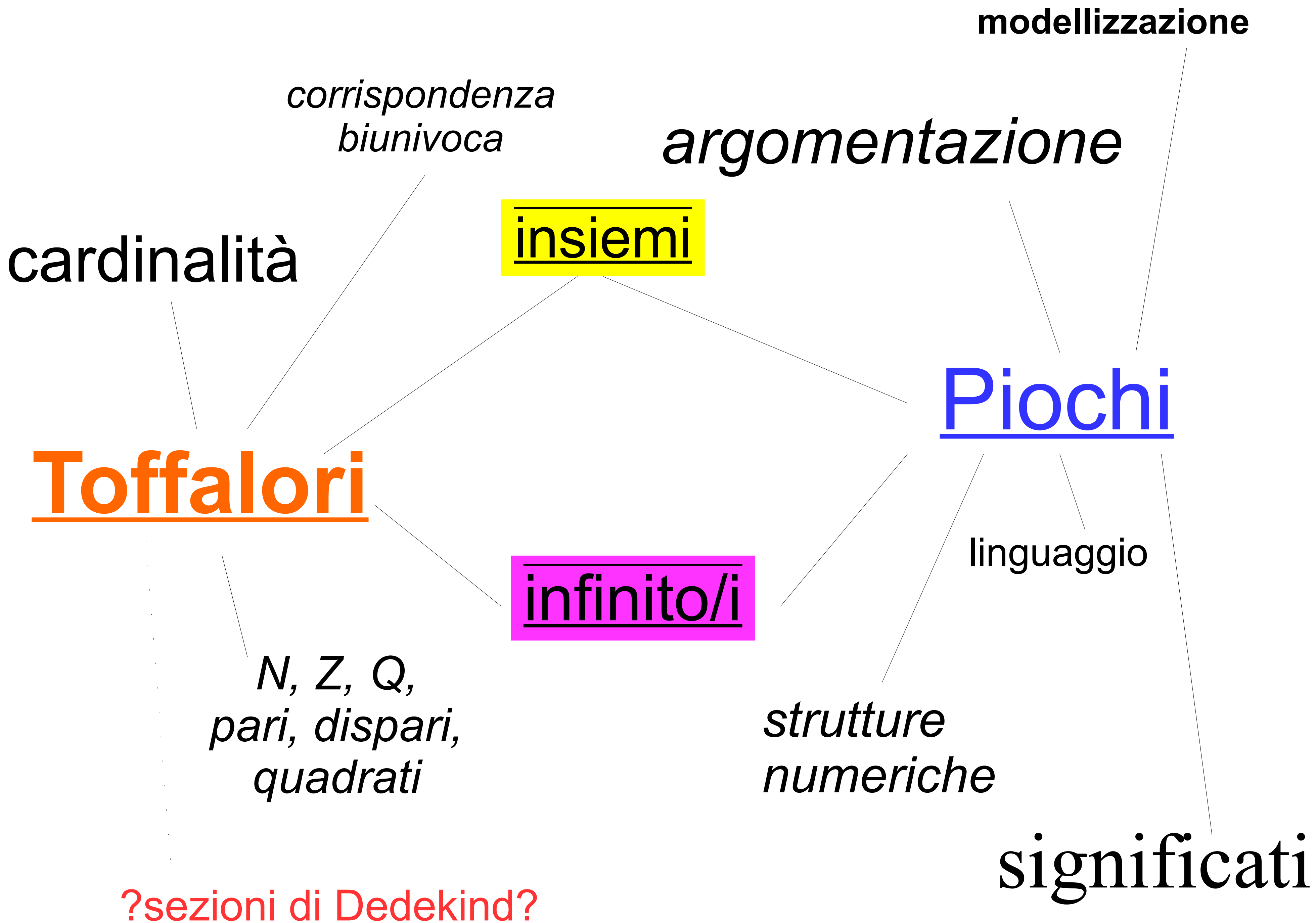
con la collaborazione dell'Urs

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
Ufficio Scolastico Regionale per la Toscana
Direzione Generale

Francesco Chesi **I.C. Guicciardini, Firenze**

francesco.chesi@gmail.com **3338407029**


modellizzazione
corrispondenza biunivoca
argomentazione
cardinalità
insiemi
Piochi
Toffalori
linguaggio
infinito/i
N, Z, Q,
pari, dispari,
quadrati
strutture
numeriche
significati
?sezioni di Dedekind?

Quando incontriamo l'infinito in classe?

Penso che il numero intero da che mondo è mondo sia sempre stato introdotto attraverso gli insiemi. Nessuna maestra ha mai presentato il numero cinque senza presentare cinque ciliegie, cinque castagne, ecc.

G. Prodi (1971)

L'assurda gara mondiale di matematica

Mio padre ed io giungemmo all'Accademia quando il presidente Maust stava cominciando l'appello dei partecipanti alla gara mondiale di matematica.

– Uno, due, tre, quattro, cinque…

Nella sala si udiva solamente la voce dei gareggianti.

Alle diciassette circa avevano oltrepassato il ventesimo migliaio. Alle venti, i superstiti erano sette.

– … 36 747, 36 748, 36 749, 36 750…

Alle ventuno, Pombo accese i lampioni.

– … 40 719, 40 720, 40 721…

Alle ventidue precise avvenne il primo colpo di scena; l'algebrista Pull scattò: – Un miliardo.

Un *oh* di meraviglia coronò l'inattesa sortita; si restò tutti con il fiato sospeso.

Binacchi, un italiano, aggiunse: – Un miliardo di miliardi di miliardi.

Nella sala scoppiò un applauso, subito represso dal presidente. Mio padre guardò intorno con superiorità e cominciò: – Un miliardo di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi, di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi…

La folla delirava: – Evviva, evviva…

– … di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi…

Il presidente Maust, pallidissimo, mormorava a mio padre, tirandolo per le falde della palandrana: – Basta, basta, vi farà male.

Mio padre seguitava fieramente: – … di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi!

A poco a poco la sua voce si smorzò, l'ultimo fievole di miliardi gli uscì dalle labbra come un sospiro, infine si abbatté sfinito sulla sedia. Il principe Ottone gli si avvicinò, e stava per appuntargli la medaglia sul petto, quando Gianni Binacchi urlò:

– Più uno!

La folla precipitatasi nell'emiciclo, portò in trionfo Gianni Binacchi.

Quando tornammo a casa, mia madre ci aspettava ansiosa alla porta.

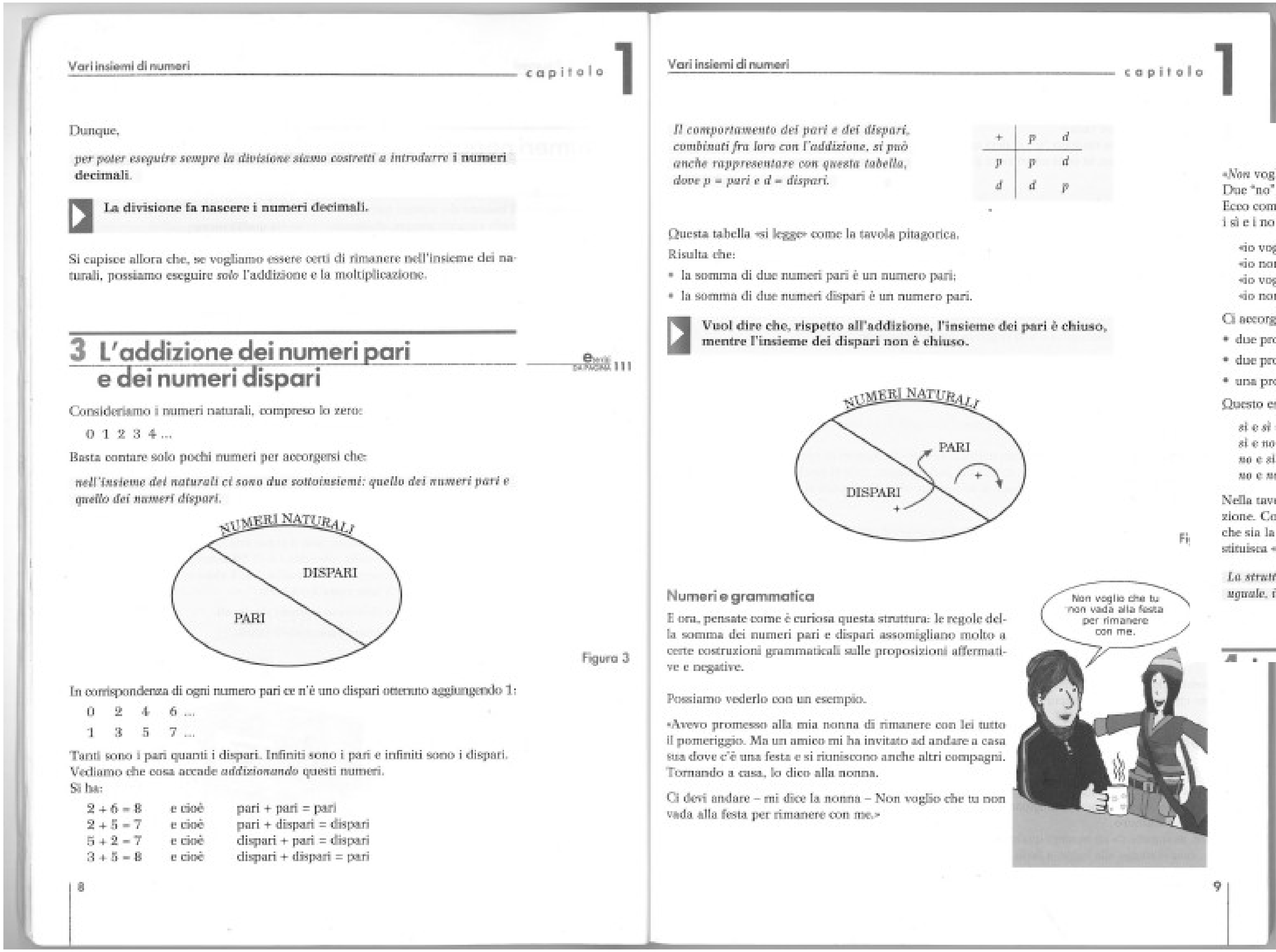
Pioveva. Il babbo le si gettò tra le braccia singhiozzando:

– Se avessi detto più due avrei vinto io.

C. Zavattini, *L'infinito*, Editori Riuniti

Emma Castelnuovo e gli insiemi (1)

L'addizione die numeri pari e die numeri dispari. Numeri A, pag. 8.



Vari insiemi di numeri — capitolo 1

Dunque,

per poter eseguire sempre la divisione siamo costretti a introdurre **i numeri decimali**.

La divisione fa nascere i numeri decimali.

Si capisce allora che, se vogliamo essere certi di rimanere nell'insieme dei naturali, possiamo eseguire *solo* l'addizione e la moltiplicazione.

3 L'addizione dei numeri pari e dei numeri dispari

esercizi da pagina 111

Consideriamo i numeri naturali, compreso lo zero:

0 1 2 3 4 ...

Basta contare solo pochi numeri per accorgersi che:

nell'insieme dei naturali ci sono due sottoinsiemi: quello dei numeri pari e quello dei numeri dispari.

Figura 3

In corrispondenza di ogni numero pari ce n'è uno dispari ottenuto aggiungendo 1:

0 2 4 6 ...
1 3 5 7 ...

Tanti sono i pari quanti i dispari. Infiniti sono i pari e infiniti sono i dispari. Vediamo che cosa accade *addizionando* questi numeri.

Si ha:

$2 + 6 = 8$	e cioè	pari + pari = pari
$2 + 5 = 7$	e cioè	pari + dispari = dispari
$5 + 2 = 7$	e cioè	dispari + pari = dispari
$3 + 5 = 8$	e cioè	dispari + dispari = pari

8

Vari insiemi di numeri — capitolo 1

Il comportamento dei pari e dei dispari, combinati fra loro con l'addizione, si può anche rappresentare con questa tabella, dove p = pari e d = dispari.

+	p	d
p	p	d
d	d	p

Questa tabella «si legge» come la tavola pitagorica.

Risulta che:

- la somma di due numeri pari è un numero pari;
- la somma di due numeri dispari è un numero pari.

Vuol dire che, rispetto all'addizione, l'insieme dei pari è chiuso, mentre l'insieme dei dispari non è chiuso.

Numeri e grammatica

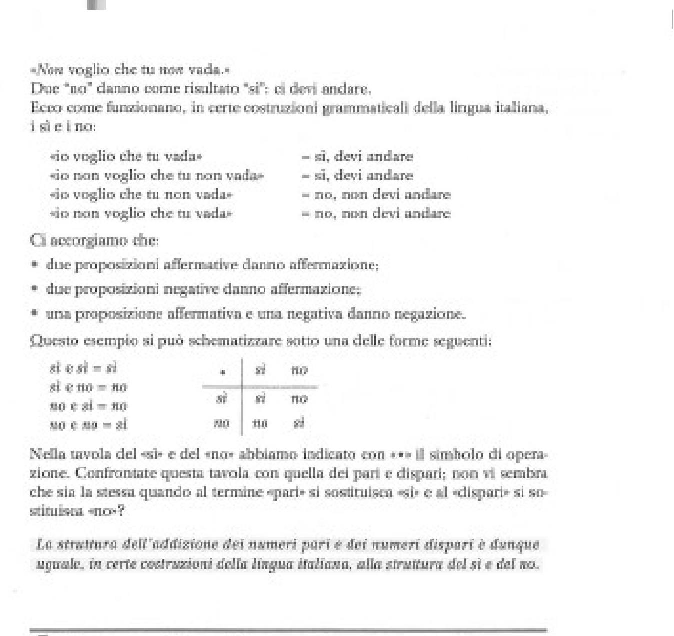
E ora, pensate come è curiosa questa struttura: le regole della somma dei numeri pari e dispari assomigliano molto a certe costruzioni grammaticali sulle proposizioni affermative e negative.

Possiamo vederlo con un esempio.

«Avevo promesso alla mia nonna di rimanere con lei tutto il pomeriggio. Ma un amico mi ha invitato ad andare a casa sua dove c'è una festa e si riuniscono anche altri compagni. Tornando a casa, lo dico alla nonna.

Ci devi andare – mi dice la nonna – Non voglio che tu non vada alla festa per rimanere con me.»

9



«*Non* voglio che tu *non* vada.»

Due "no" danno come risultato "sì": ci devi andare.

Ecco come funzionano, in certe costruzioni grammaticali della lingua italiana, i sì e i no:

«io voglio che tu vada»	= sì, devi andare
«io non voglio che tu non vada»	= sì, devi andare
«io voglio che tu non vada»	= no, non devi andare
«io non voglio che tu vada»	= no, non devi andare

Ci accorgiamo che:

- due proposizioni affermative danno affermazione;
- due proposizioni negative danno affermazione;
- una proposizione affermativa e una negativa danno negazione.

Questo esempio si può schematizzare sotto una delle forme seguenti:

sì e sì = sì
sì e no = no
no e sì = no
no e no = sì

*	sì	no
sì	sì	no
no	no	sì

Nella tavola del «sì» e del «no» abbiamo indicato con «*» il simbolo di operazione. Confrontate questa tavola con quella dei pari e dispari; non vi sembra che sia la stessa quando al termine «pari» si sostituisca «sì» e al «dispari» si sostituisca «no»?

La struttura dell'addizione dei numeri pari e dei numeri dispari è dunque uguale, in certe costruzioni della lingua italiana, alla struttura del sì e del no.

<u>Riconoscimento di strutture</u>

Emma Castelnuovo e gli insiemi (1)

0 e 1

«*Non* voglio che tu *non* vada.»
Due "no" danno come risultato "sì": ci devi andare.
Ecco come funzionano, in certe costruzioni grammaticali della lingua italiana, i sì e i no:

«io voglio che tu vada»	= sì, devi andare
«io non voglio che tu non vada»	= sì, devi andare
«io voglio che tu non vada»	= no, non devi andare
«io non voglio che tu vada»	= no, non devi andare

Ci accorgiamo che:

- due proposizioni affermative danno affermazione;
- due proposizioni negative danno affermazione;
- una proposizione affermativa e una negativa danno negazione.

Questo esempio si può schematizzare sotto una delle forme seguenti:

sì e *sì* = *sì*
sì e *no* = *no*
no e *sì* = *no*
no e *no* = *sì*

•	*sì*	*no*
sì	*sì*	*no*
no	*no*	*sì*

Nella tavola del «sì» e del «no» abbiamo indicato con «•» il simbolo di operazione. Confrontate questa tavola con quella dei pari e dispari; non vi sembra che sia la stessa quando al termine «pari» si sostituisca «sì» e al «dispari» si sostituisca «no»?

La struttura dell'addizione dei numeri pari e dei numeri dispari è dunque uguale, in certe costruzioni della lingua italiana, alla struttura del sì e del no.

4 I numeri 1 e 0 nelle quattro operazioni

esercizi DA PAGINA 114

Si direbbe che 1 e 0 sono numeri stupidi, perché... contano poco.
È vero che non sono importanti? Vediamolo.

■ Cominciamo da 1

L'1 nell'addizione e nella sottrazione

Se si parte da zero e si aggiunge 1 e 1 e 1... si costruiscono tanti numeri; quanti? Quanti si vuole. Si può immaginare di costruire **infiniti numeri**; **non c'è un ultimo numero**.
Invece, se si parte da un numero qualunque, e si sottrae 1 e poi 1, e poi ancora 1, ..., non si sfugge alla legge: *a furia di togliere 1 si arriva al numero 0!*

L'1 nella moltiplicazione e nella divisione

Un esempio:

$8 \cdot 1 = 8$

e anche:

$0 \cdot 1 = 0$

Dunque,

l'1 non ha nessuna influenza nella moltiplicazione; *l'1 non altera il numero per cui si moltiplica.*

E anche nella divisione, l'1 non ha influenza; basta un esempio per capirlo:

$7 : 1 = 7$

■ E ora, lo zero

Lo zero nell'addizione e nella sottrazione

Se aggiungo o tolgo 0 a un numero il risultato è sempre quel numero. Per esempio:

$5 + 0 = 5$
$5 - 0 = 5$

Lo zero non ha proprio influenza.

Lo zero nella moltiplicazione e nella divisione

Se moltiplico un numero per 0, il risultato è sempre 0. Per esempio:

$8 \cdot 0 = 0$

perché:

$8 \cdot 0 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0$

Zero fa da padrone nella moltiplicazione: basta uno zero per annullare tutto!

E nella divisione?

Quanto fa

$8 : 0$?

Verrebbe voglia di dire 8 oppure 0; ma nessuno di questi risultati è giusto ed ecco perché. Se si pensa alla divisione:

$8 : 4$

si capisce che il risultato è 2 perché:

$4 \cdot 2 = 8$

Riconoscimento di strutture

Emma Castelnuovo e gli insiemi (1)

L'addizione die numeri pari e die numeri dispari. Numeri A, pag. 8.

Dunque,

per poter eseguire sempre la divisione siamo costretti a introdurre **i numeri decimali**.

La divisione fa nascere i numeri decimali.

Si capisce allora che, se vogliamo essere certi di rimanere nell'insieme dei naturali, possiamo eseguire *solo* l'addizione e la moltiplicazione.

3 L'addizione dei numeri pari e dei numeri dispari

esercizi da pagina 111

Consideriamo i numeri naturali, compreso lo zero:

0 1 2 3 4 ...

Basta contare solo pochi numeri per accorgersi che:

nell'insieme dei naturali ci sono due sottoinsiemi: quello dei numeri pari e quello dei numeri dispari.

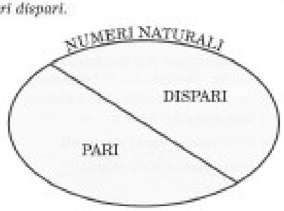


Figura 3

In corrispondenza di ogni numero pari ce n'è uno dispari ottenuto aggiungendo 1:

0 2 4 6 ...
1 3 5 7 ...

Tanti sono i pari quanti i dispari. Infiniti sono i pari e infiniti sono i dispari. Vediamo che cosa accade *addizionando* questi numeri.

Si ha:

$2+6=8$	e cioè	pari + pari = pari
$2+5=7$	e cioè	pari + dispari = dispari
$5+2=7$	e cioè	dispari + pari = dispari
$3+5=8$	e cioè	dispari + dispari = pari

Il comportamento dei pari e dei dispari, combinati fra loro con l'addizione, si può anche rappresentare con questa tabella, dove p = pari e d = dispari.

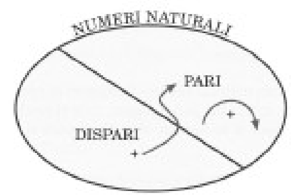
+	p	d
p	p	d
d	d	p

Questa tabella «si legge» come la tavola pitagorica.

Risulta che:

- la somma di due numeri pari è un numero pari;
- la somma di due numeri dispari è un numero pari.

Vuol dire che, rispetto all'addizione, l'insieme dei pari è chiuso, mentre l'insieme dei dispari non è chiuso.



Fi

Numeri e grammatica

E ora, pensate come è curiosa questa struttura: le regole della somma dei numeri pari e dispari assomigliano molto a certe costruzioni grammaticali sulle proposizioni affermative e negative.

Possiamo vederlo con un esempio.

«Avevo promesso alla mia nonna di rimanere con lei tutto il pomeriggio. Ma un amico mi ha invitato ad andare a casa sua dove c'è una festa e si riuniscono anche altri compagni. Tornando a casa, lo dico alla nonna.

Ci devi andare – mi dice la nonna – Non voglio che tu non vada alla festa per rimanere con me.»

«*Non* voglio che tu *non* vada.»
Due "no" danno come risultato "sì": ci devi andare.
Ecco come funzionano, in certe costruzioni grammaticali della lingua italiana, i sì e i no:

«io voglio che tu vada»	= sì, devi andare
«io non voglio che tu non vada»	= sì, devi andare
«io voglio che tu non vada»	= no, non devi andare
«io non voglio che tu vada»	= no, non devi andare

Ci accorgiamo che:

- due proposizioni affermative danno affermazione;
- due proposizioni negative danno affermazione;
- una proposizione affermativa e una negativa danno negazione.

Questo esempio si può schematizzare sotto una delle forme seguenti:

sì e sì = sì
sì e no = no
no e sì = no
no e no = sì

•	*sì*	*no*
sì	*sì*	*no*
no	*no*	*sì*

Nella tavola del «sì» e del «no» abbiamo indicato con «•» il simbolo di operazione. Confrontate questa tavola con quella dei pari e dispari; non vi sembra che sia la stessa quando al termine «pari» si sostituisca «sì» e al «dispari» si sostituisca «no»?

La struttura dell'addizione dei numeri pari e dei numeri dispari è dunque uguale, in certe costruzioni della lingua italiana, alla struttura del sì e del no.

<u>Riconoscimento di strutture</u>

Emma Castelnuovo e gli insiemi (2)

Insiemi infiniti e insiemi finiti → L'aritmetica dell'orologio. Numeri A, pag. 12

$3 + 4 = 7$

$10 + 5 = 3$

$11 + 7 = 6$

- Indovinelli e curiosità (perché "ogni sano intelletto arebbe a noia occuparsi sempre di mercantia" …) **Villani**

A Firenze le persone che hanno lo stesso numero di capelli sono sicuramente almeno due, a Prato è molto probabile che sia così, mentre a Milano almeno 5 persone hanno lo stesso numero di capelli. Perché?

- Indovinelli e curiosità (perché "ogni sano intelletto arebbe a noia occuparsi sempre di mercantia" …)

Villani

A Firenze le persone che hanno lo stesso numero di capelli sono sicuramente almeno due, a Prato è molto probabile che sia così, mentre a Milano almeno 5 persone hanno lo stesso numero di capelli. Perché?

La superficie media del cuoio capelluto in una persona è di circa 775 centimetri quadrati;
Ogni centimetro quadrato può portare al più 300 capelli;
QUINDI il numero massimo di capelli che si possono avere è 775 x 300 = 232500

Se in una città abitano almeno 232501 persone, almeno due persone avranno lo stesso numero di capelli!

- Indovinelli e curiosità (perché “ogni sano intelletto arebbe a noia occuparsi sempre di mercantia” …) Villani

Il principio dei cassetti

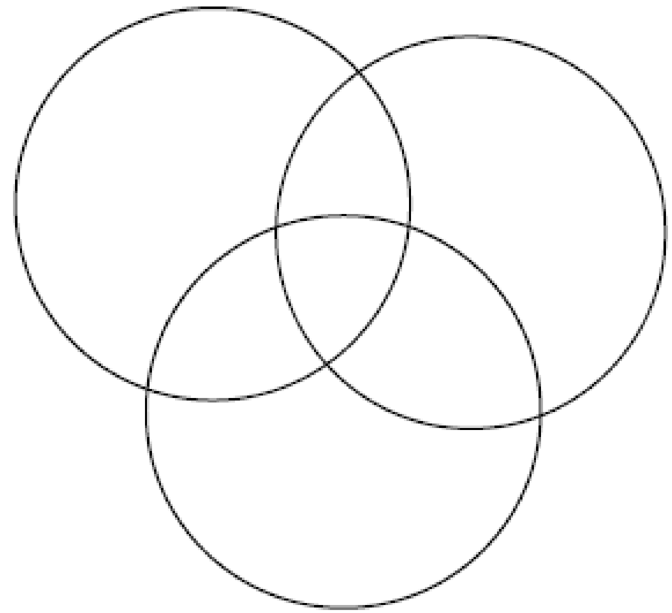
n oggetti

m gruppi

$n > m$

Almeno 2 oggetti sono in stesso gruppo

9. I NUMERI IN CERCHIO (Cat. 5, 6, 7)

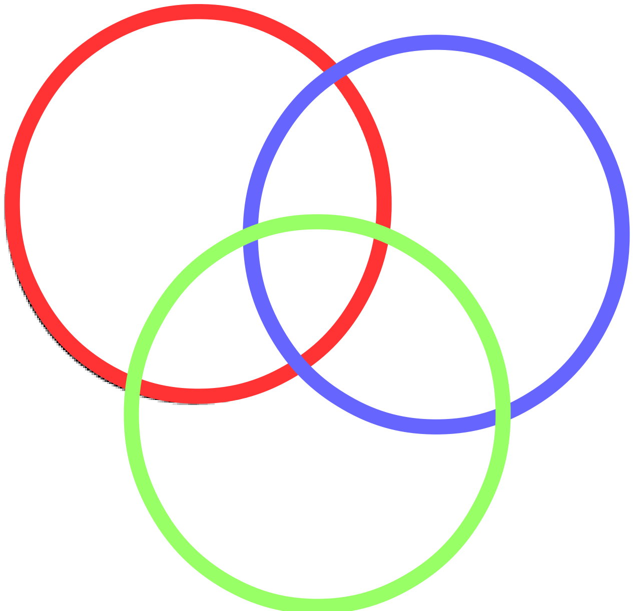


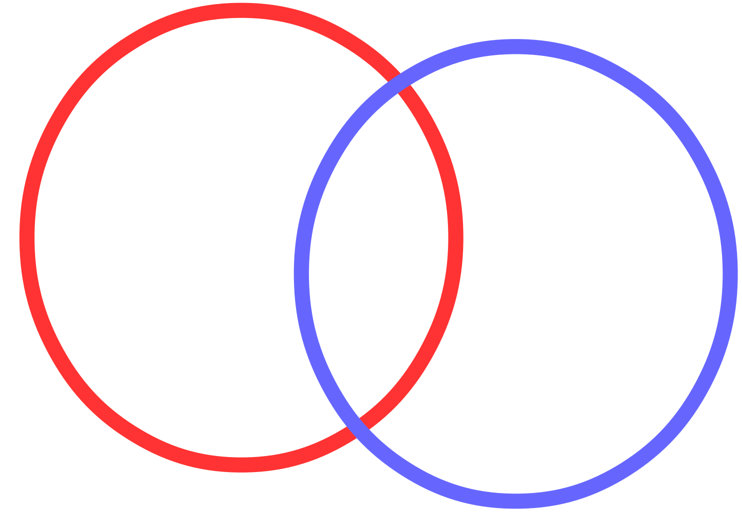
Inserite in ciascuna delle sette “regioni chiuse” formate da questi tre cerchi uno dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

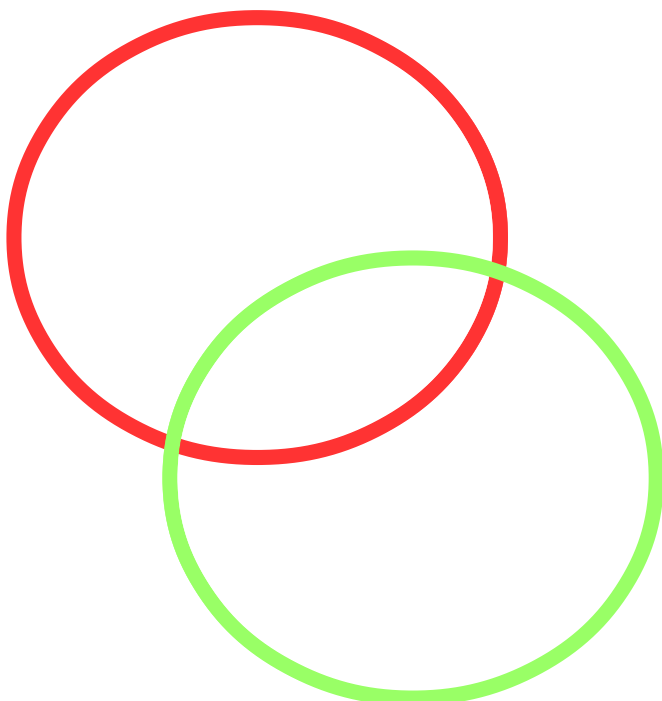
Cercate una disposizione in cui la somma dei numeri all’interno di ogni cerchio è la stessa e la più grande possibile.

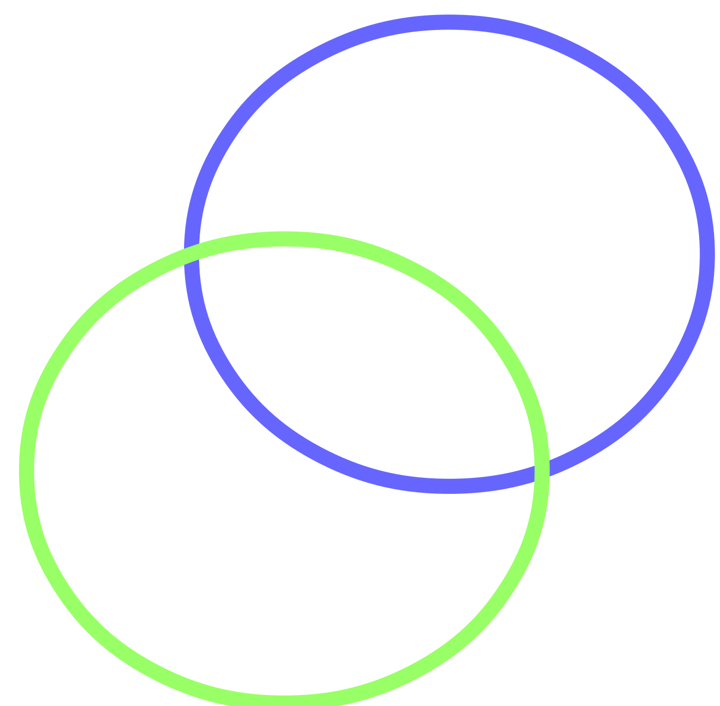
Cercate anche una disposizione in cui la somma dei numeri all’interno di ogni cerchio sia sempre la stessa, ma la più piccola possibile.

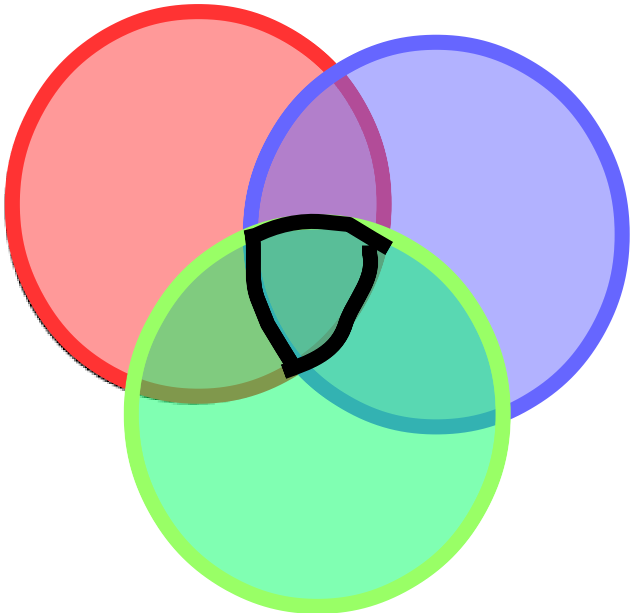
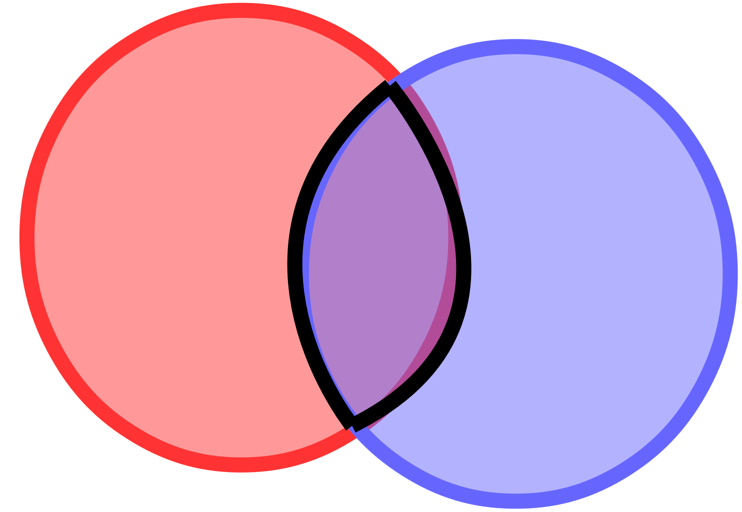
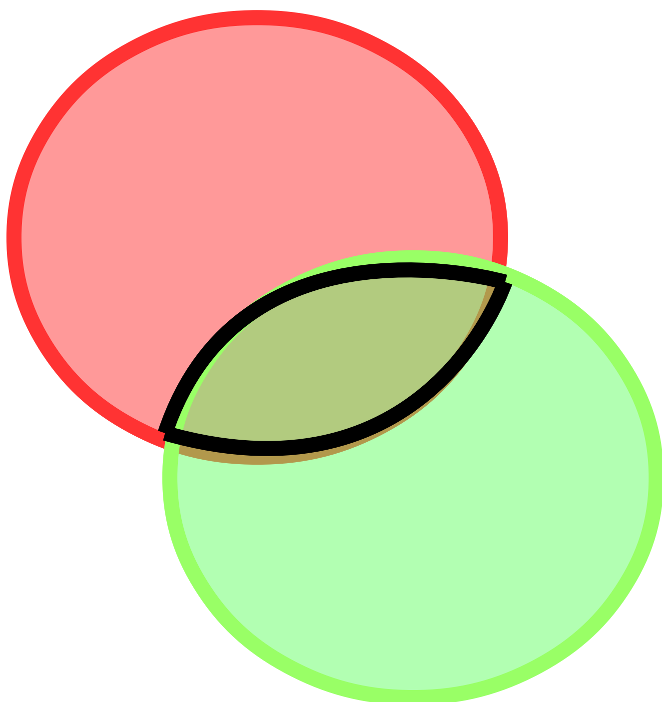
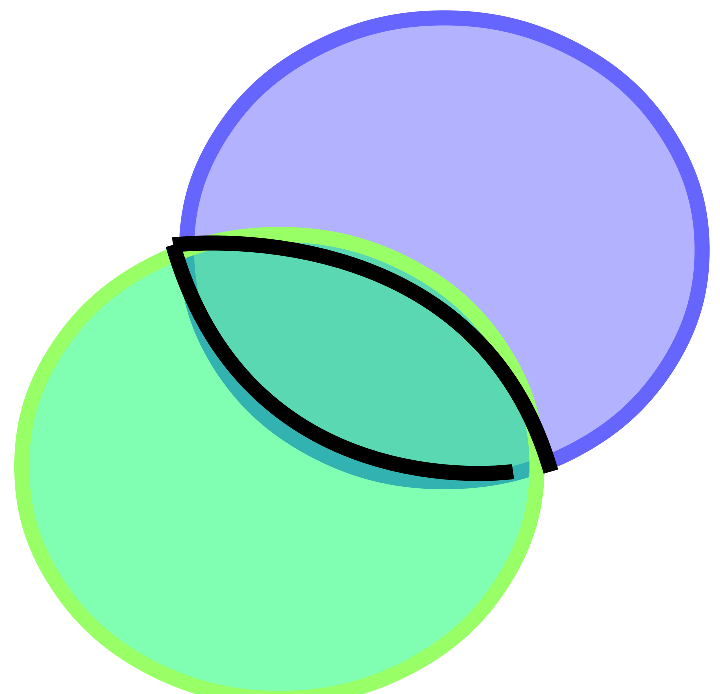
Mostrate le vostre soluzioni e spiegate il vostro ragionamento.





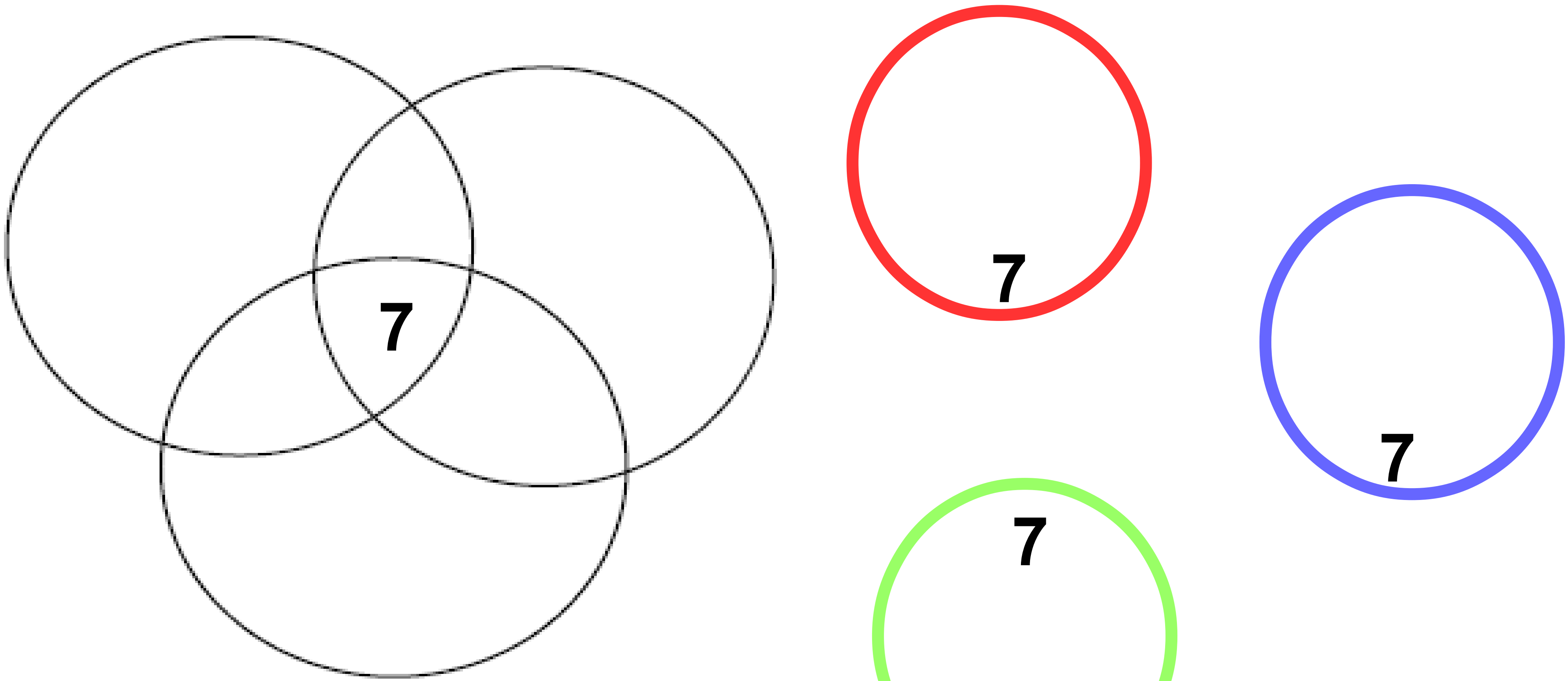




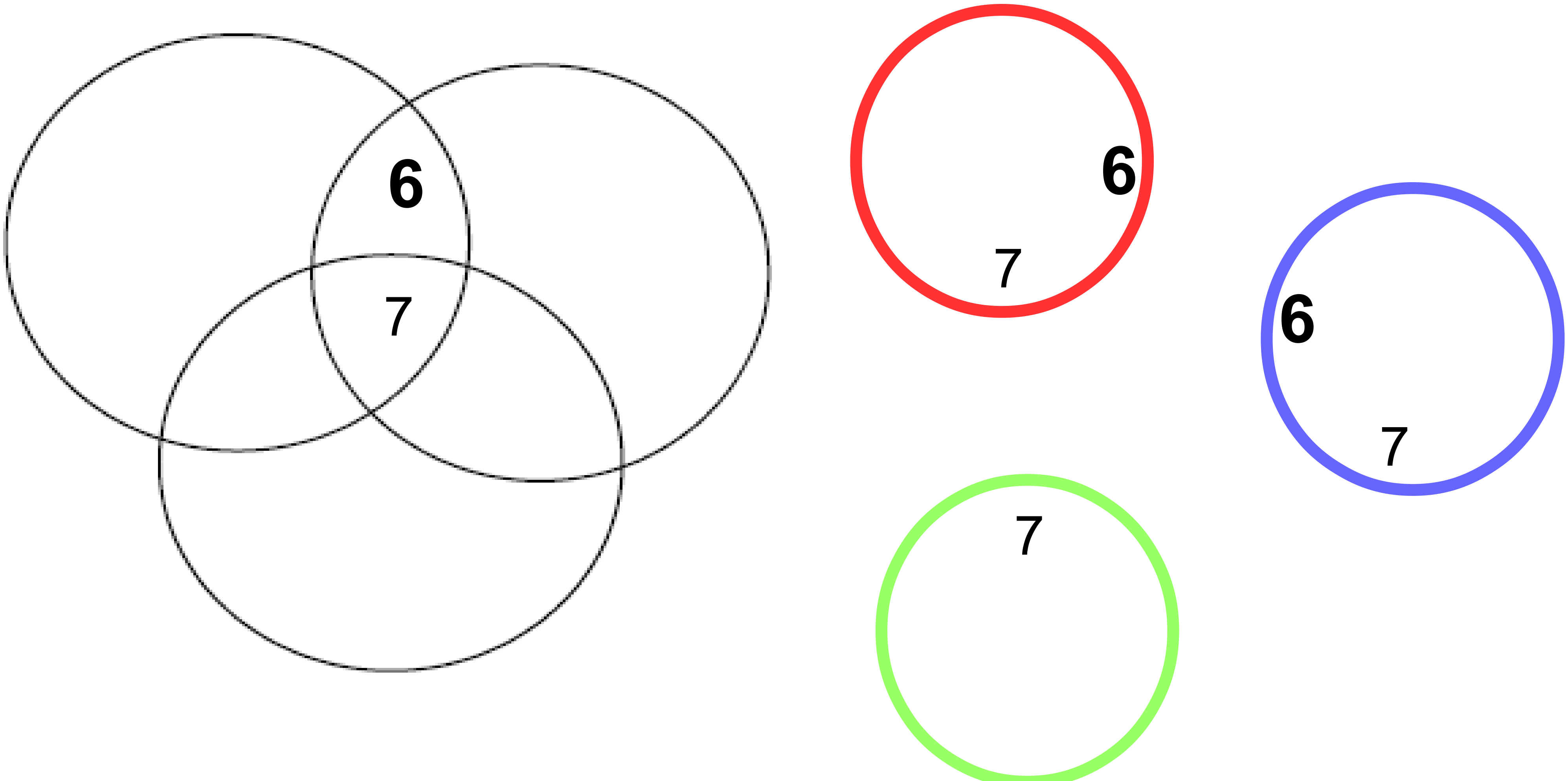
Cercate una disposizione in cui la somma dei numeri all'interno di ogni cerchio è la stessa e la più grande possibile.

1 2 3 4 5 6 7



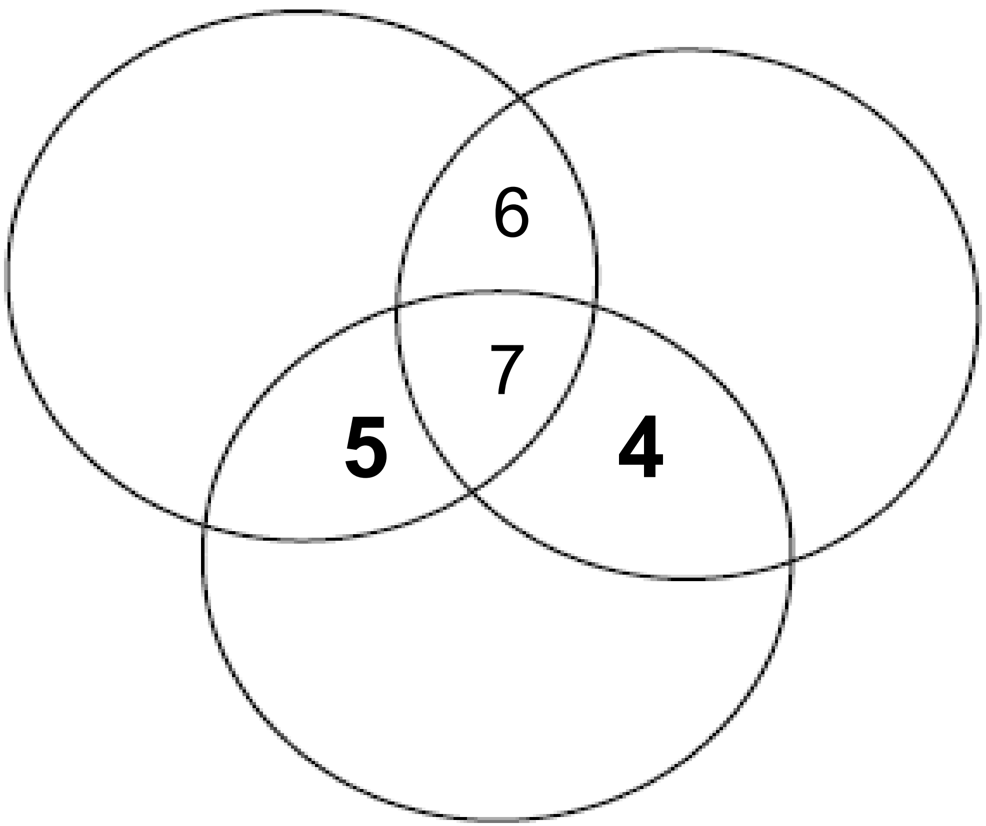
Cercate una disposizione in cui la somma dei numeri all'interno di ogni cerchio è la stessa e la più grande possibile.

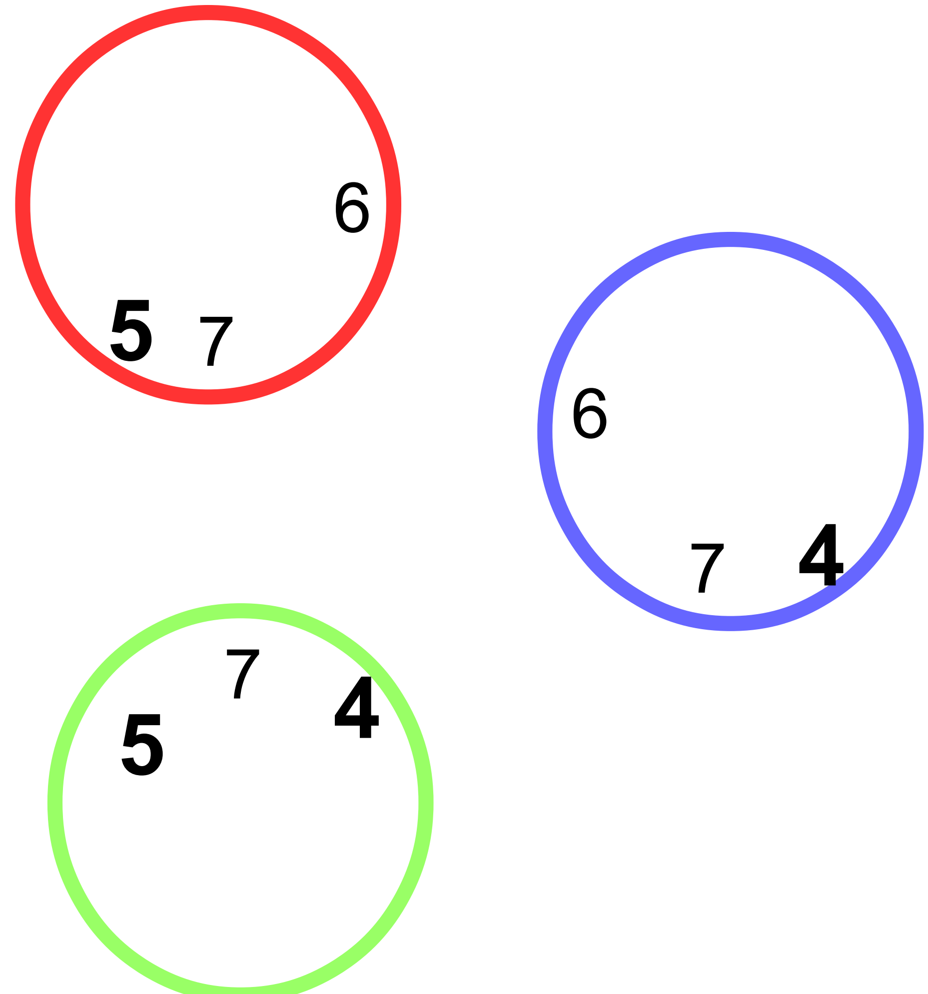
1 2 3 4 5 6 7



Cercate una disposizione in cui la somma dei numeri all'interno di ogni cerchio è la stessa e la più grande possibile.

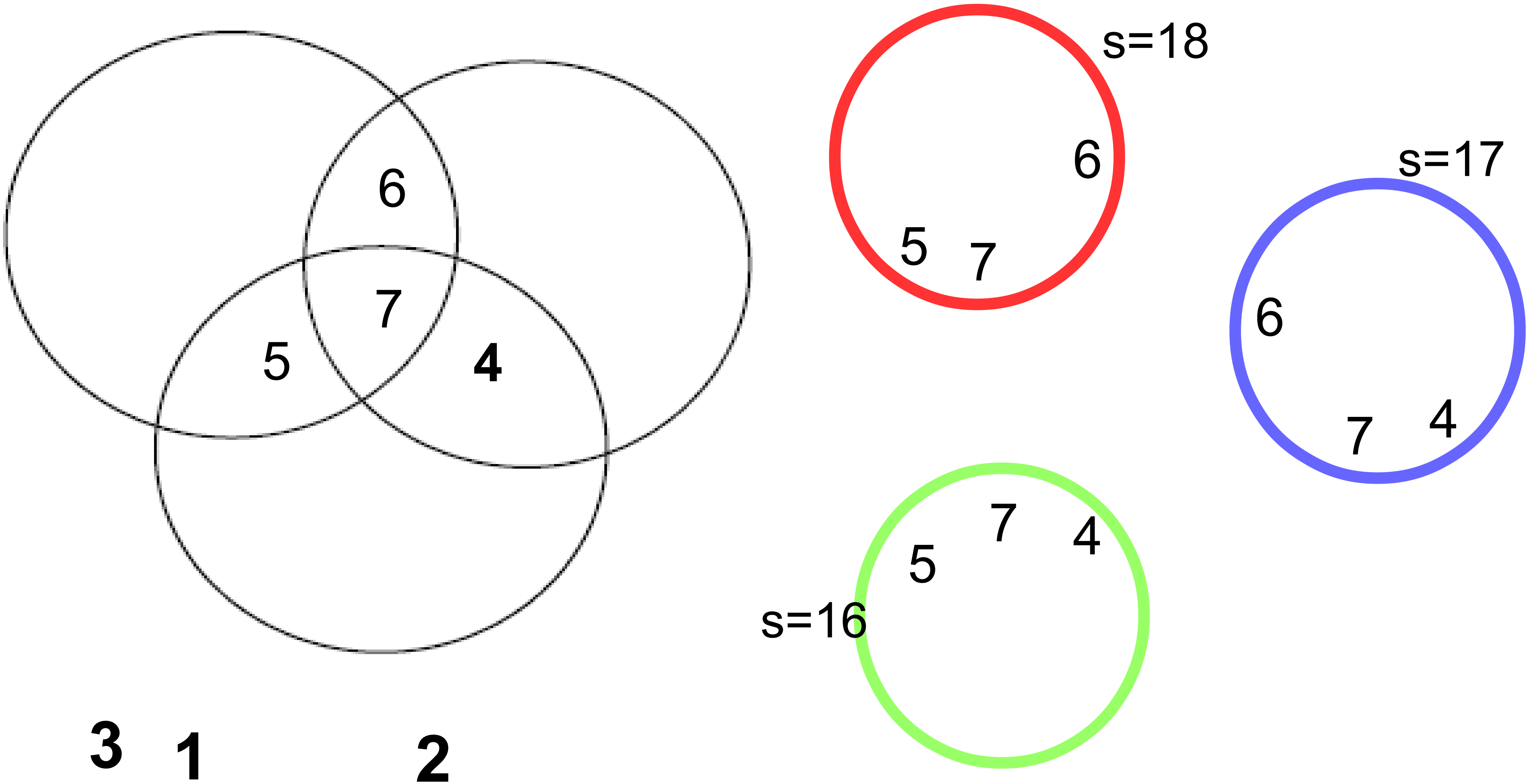
1 2 3 4 5 6 7





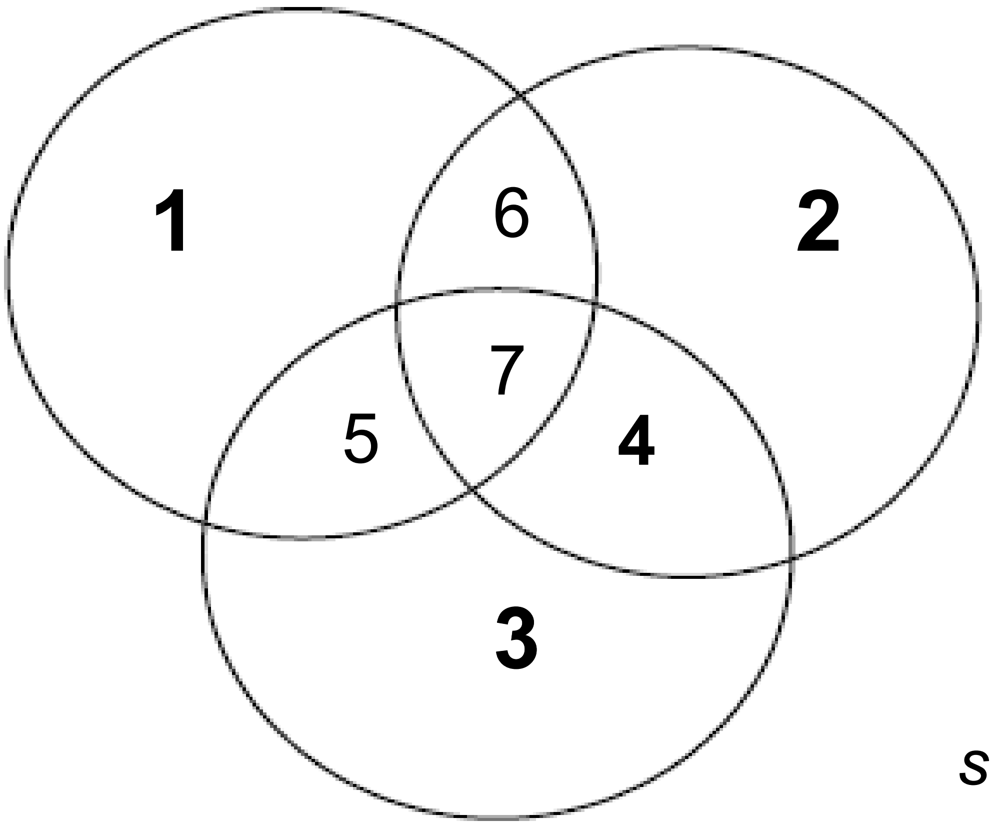
Cercate una disposizione in cui la somma dei numeri all'interno di ogni cerchio è la stessa e la più grande possibile.

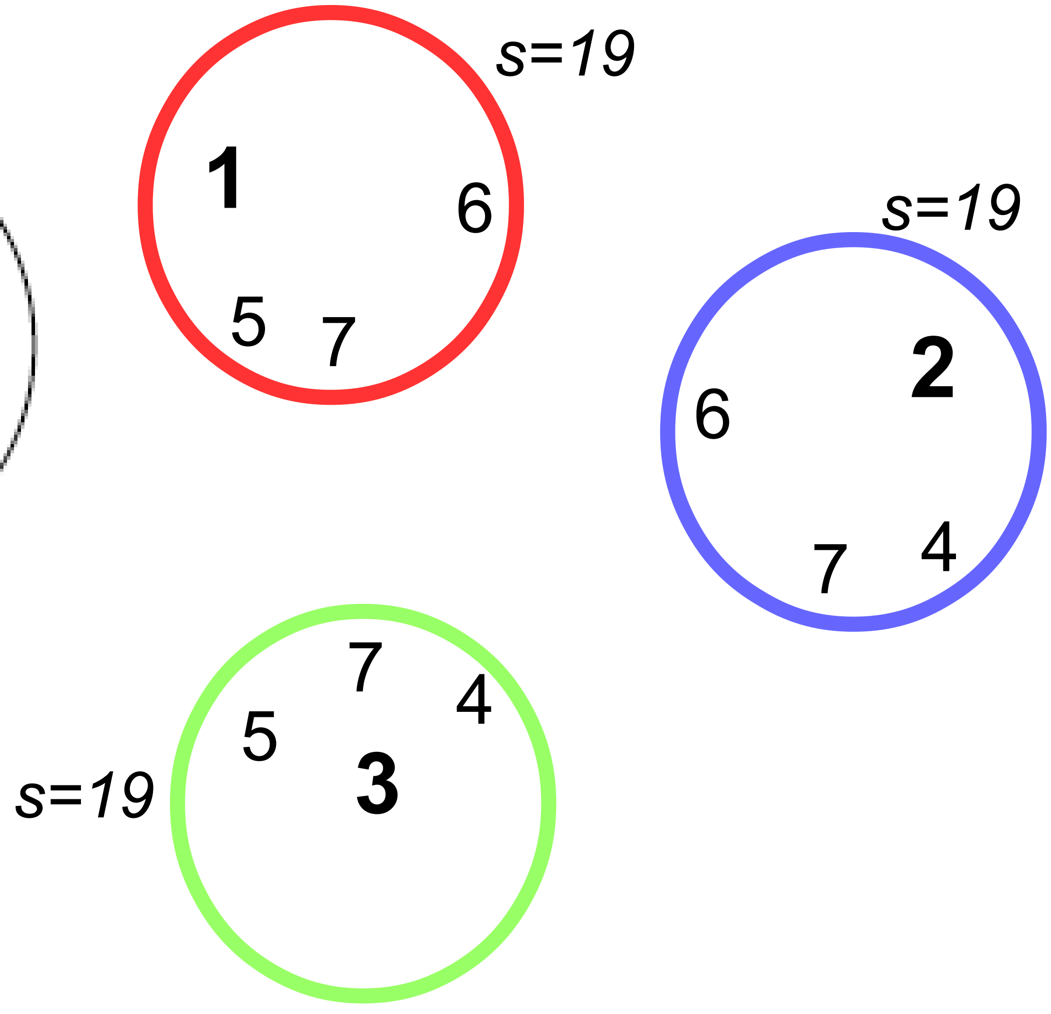
1 2 3 4 5 6 7



Cercate una disposizione in cui la somma dei numeri all'interno di ogni cerchio è la stessa e la più grande possibile.

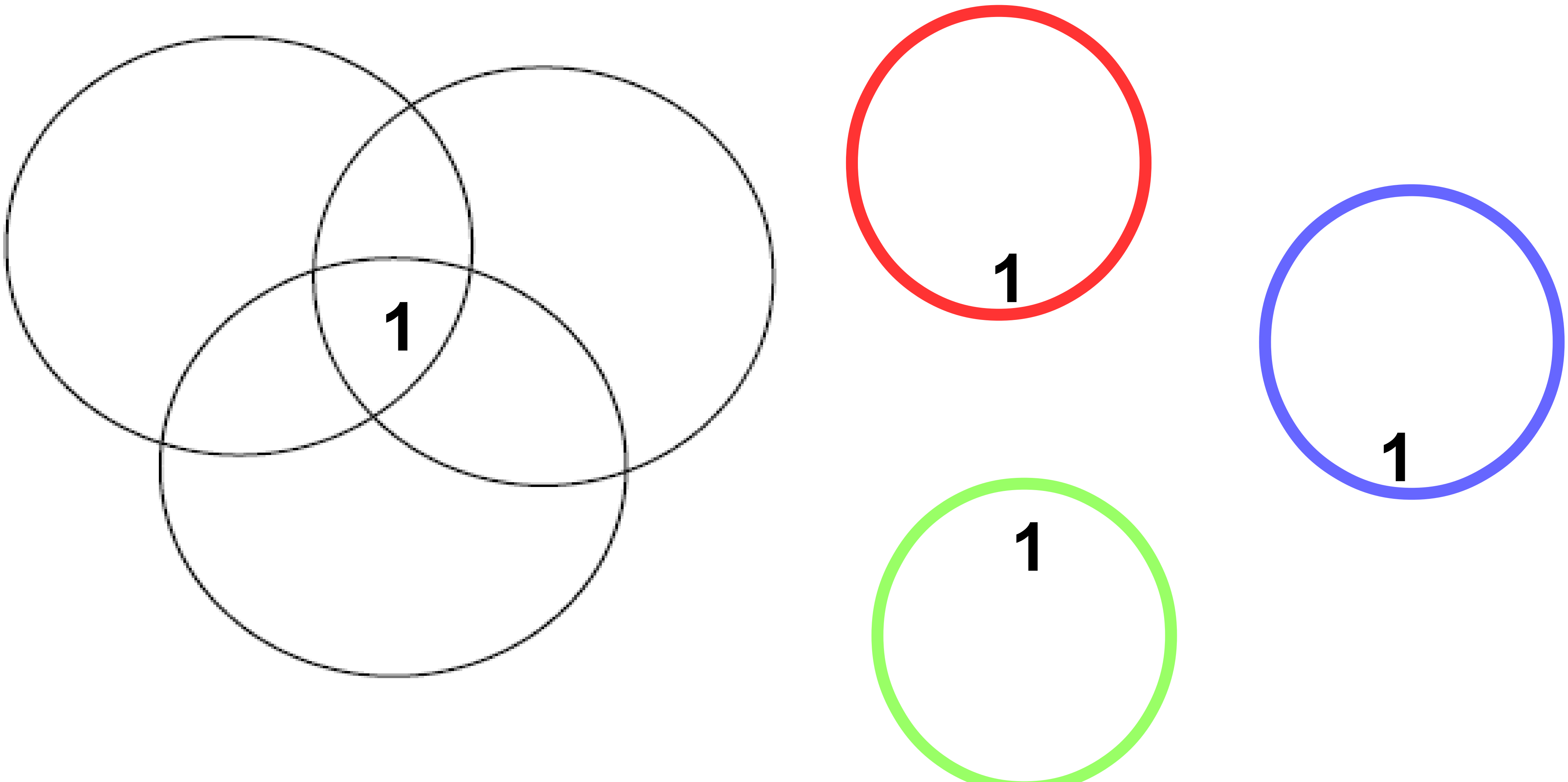
1 2 3 4 5 6 7





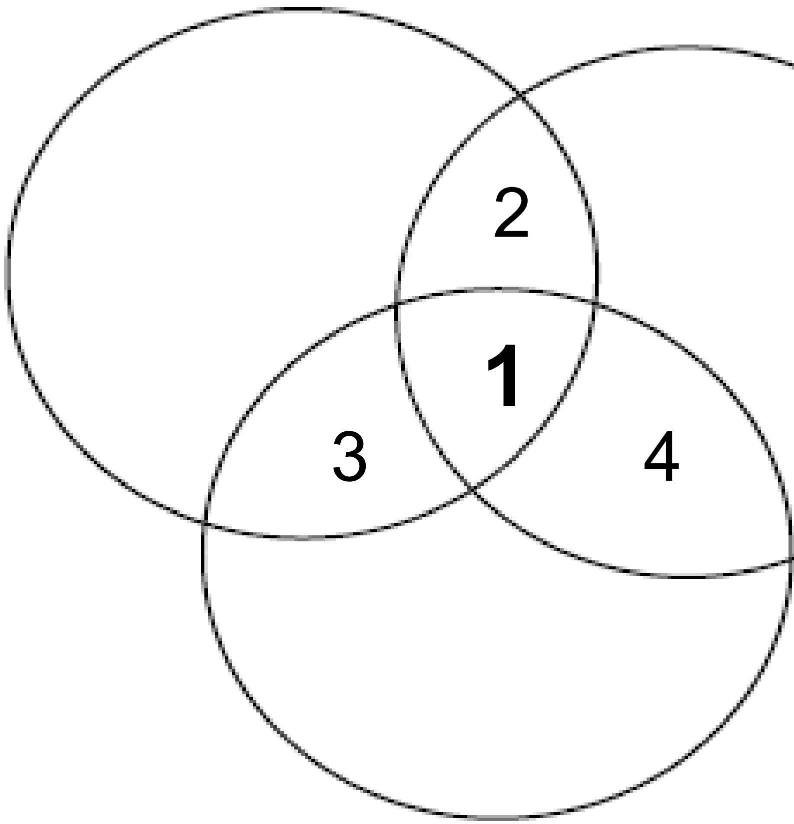
Cercate anche una disposizione in cui la somma dei numeri all'interno di ogni cerchio sia sempre la stessa, ma la più piccola possibile.

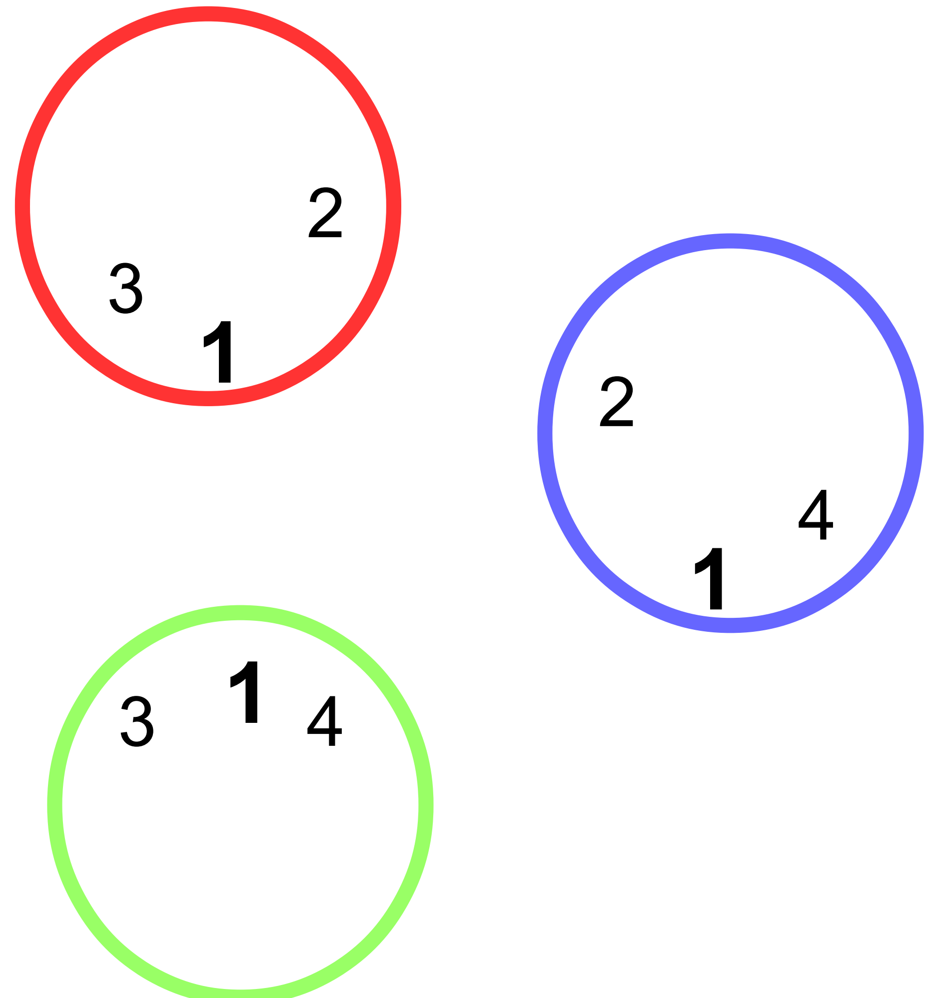
1 2 3 4 5 6 7



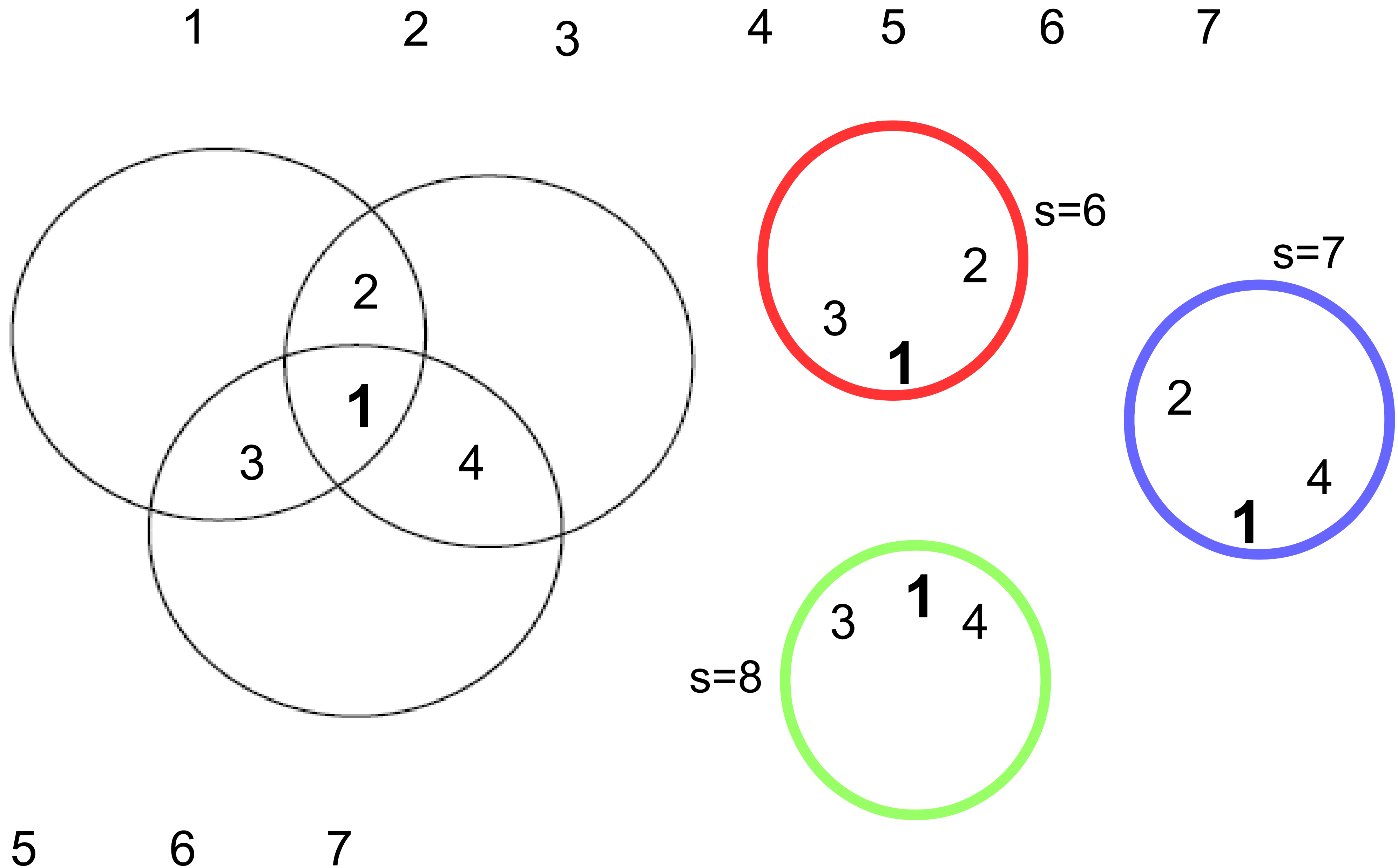
Cercate anche una disposizione in cui la somma dei numeri all'interno di ogni cerchio sia sempre la stessa, ma la più piccola possibile.

1 2 3 4 5 6 7



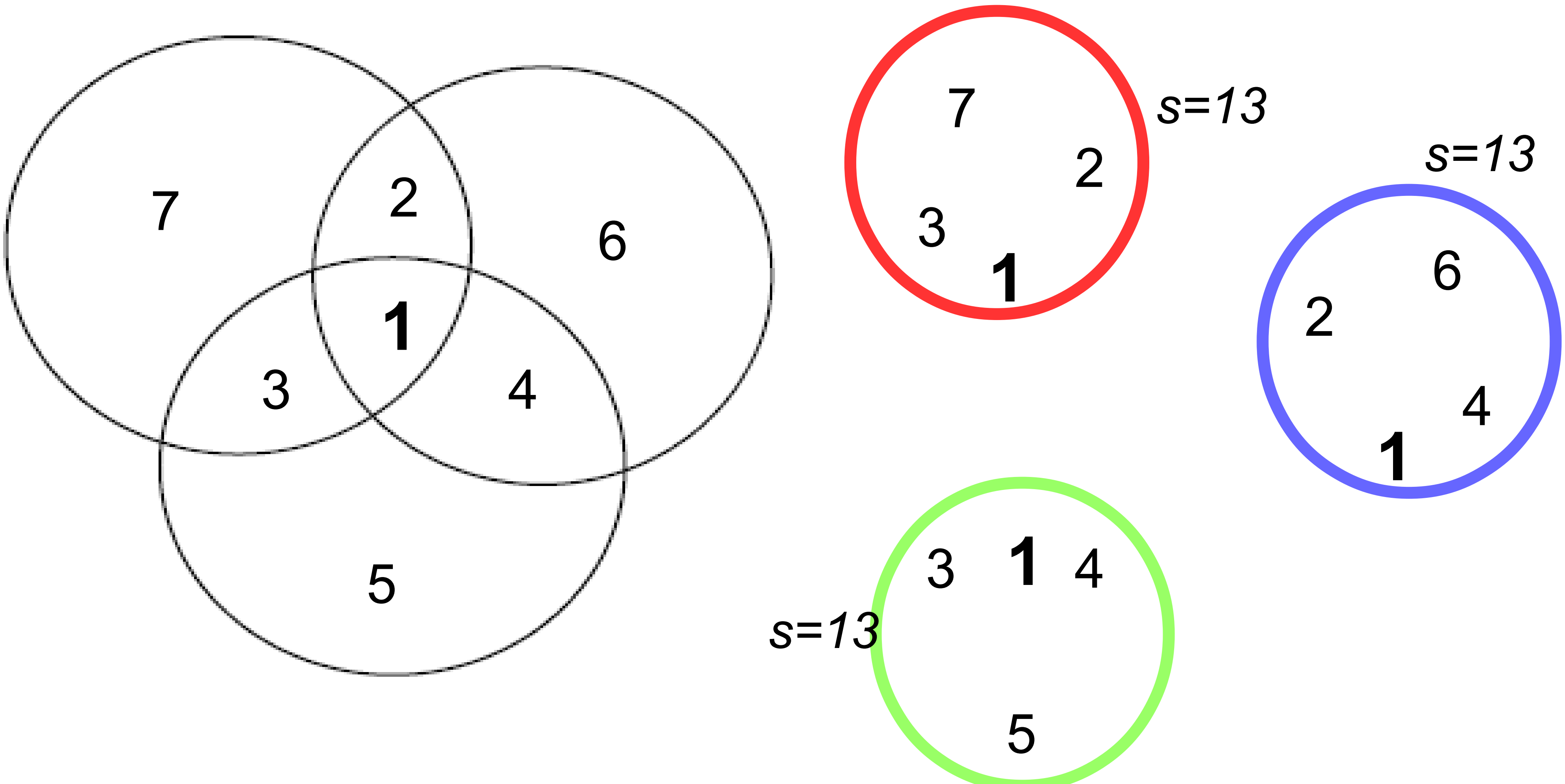


Cercate anche una disposizione in cui la somma dei numeri all'interno di ogni cerchio sia sempre la stessa, ma la più piccola possibile.



Cercate anche una disposizione in cui la somma dei numeri all'interno di ogni cerchio sia sempre la stessa, ma la più piccola possibile.

1 2 3 4 5 6 7

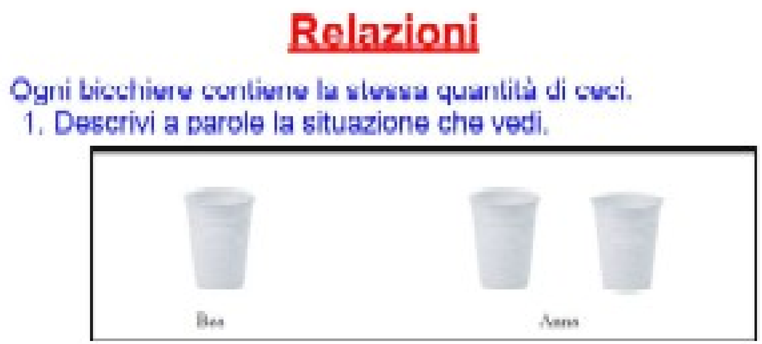


Toffalori

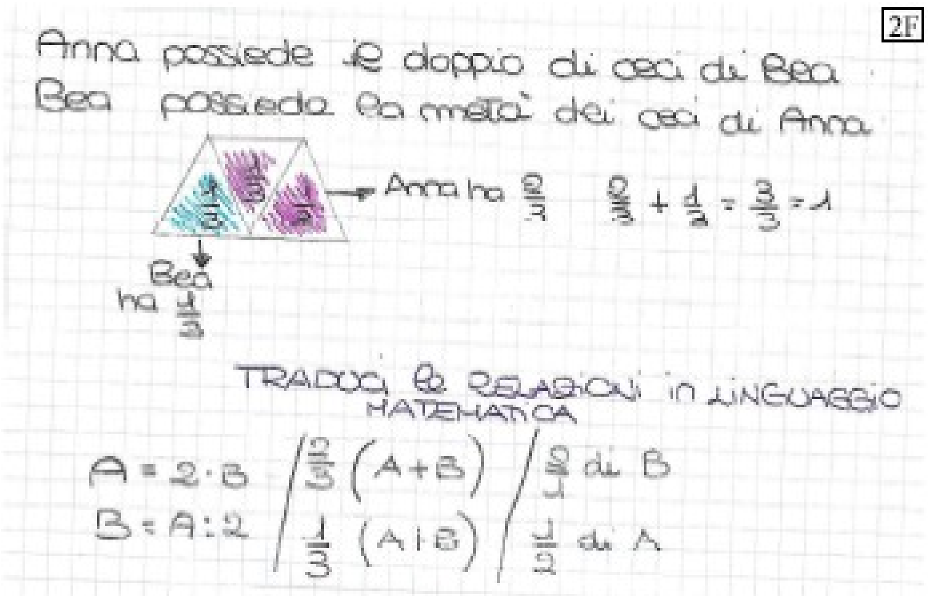
Il paradosso di Galileo: tanti naturali quanti quadrati (G. Galilei, 1638, *"Queste sono di quelle difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno all'infinito, dandogli di quegli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate: il che penso che sia inconveniente"*)

Le relazioni … uno sguardo „aperto“ … quante volte incontriamo il doppio, il triplo, ecc.?

Il percorso sulle relazioni inizia nelle due classi con la consegna di alcuni bicchieri e un certo numero di ceci a ogni coppia di alunni, oltre al problema illustrato qui sotto (Compiti 1 e 2).

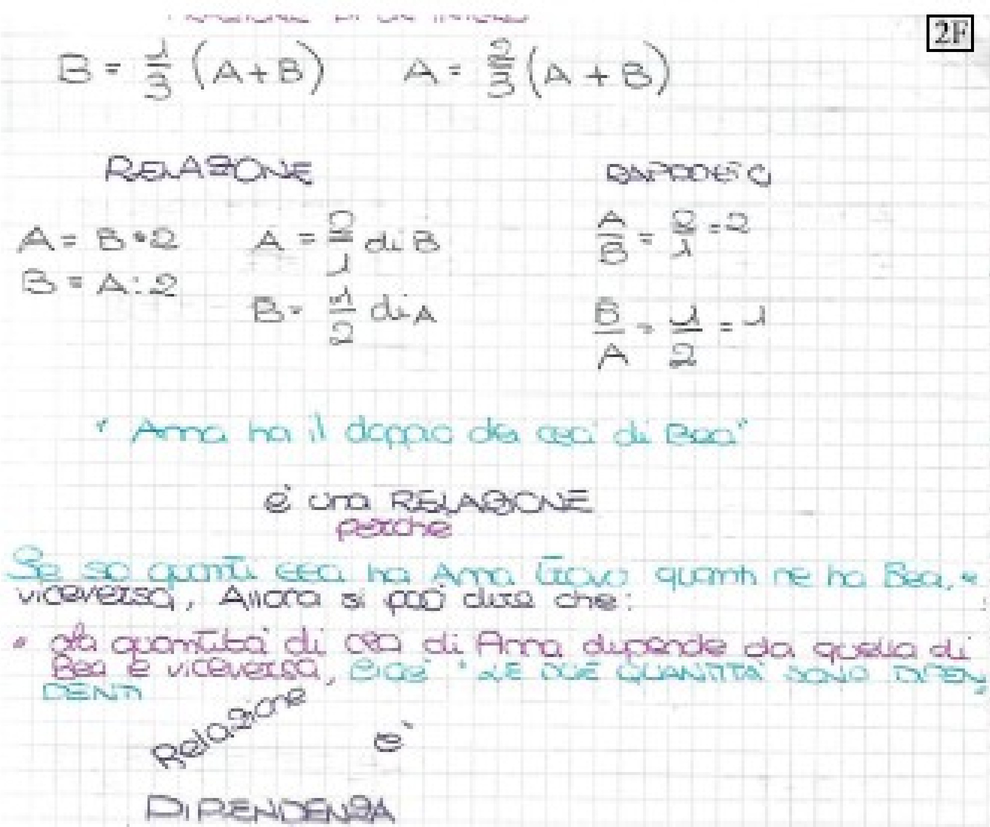


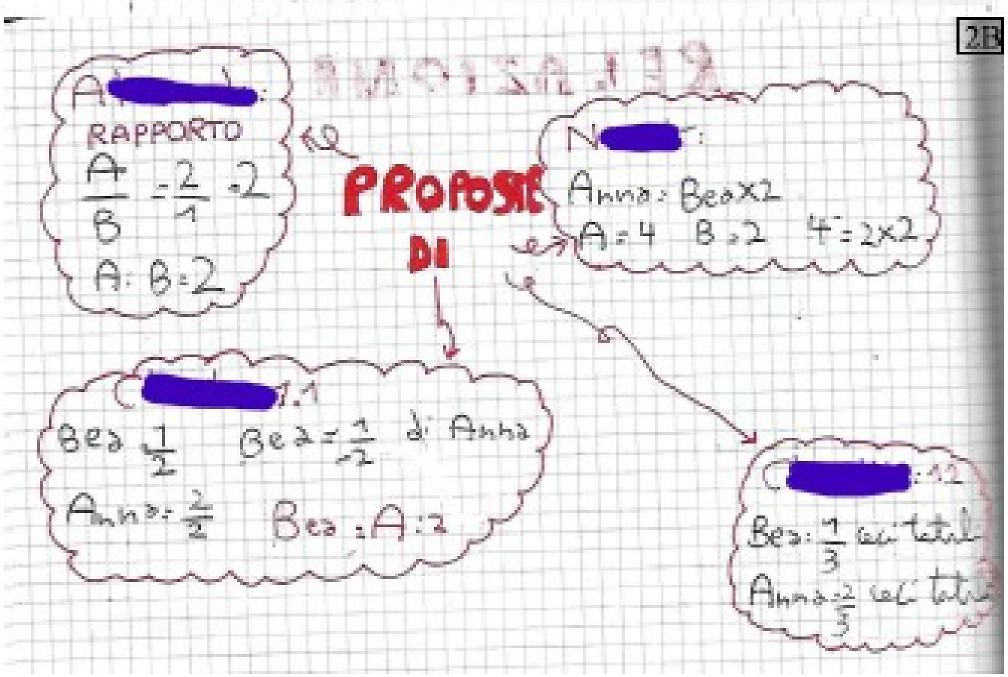
L'attività in 2F e in 2B: oltre a tradurre verbalmente, alcuni alunni hanno proposto di esprimere con le frazioni la situazione, considerando l'intero dato dalla somma dei ceci/bicchieri delle due persone.



Le traduzioni nel linguaggio matematico o simbolico, arrivano copiose, alcune corrette e altre no. Dopo aver discusso e scelto quelle corrette, si giunge a riordinare come in foto.

Introduco che cos'è un rapporto in matematico e soprattutto indico la dipendenza tra le due quantità, quella di Anna e quella di Bea, quale elemento basilare di una relazione.





Interessante è la discussione nata in 2B: B. vorrebbe aggiungere una disuguaglianza quale traduzione della relazione tra le quantità di Anna e di Bea, ma A. controbatte che ciò non stabilisce che le quantità siano una il doppio dell'altra.

Per integrare l'attività e creare l'occasione per riflettere sulla relazione:

Quali numeri di ceci può avere Anna? E quali può avere Bea?
Compila la tabella elencando 10 possibili soluzioni.

Bea	Anna

2F

B	A.
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12
7	14
8	16
9	18
10	20

(Lavoriamo per ora coi naturali)

B	A
0	0·2=0

la quantità di Anna è SEMPRE un numero PARI

la quantità di Bea è un qualsiasi numero naturale

2B

Bea	Anna
1	2
2	4
4	8
3	6
5	10
6	12
7	14
8	16
9	18
14	28

ALMENO 10 POSSIBILITÀ

Anna non può avere numeri dispari di ceci; perché Bea dovrebbe averne la metà, e i numeri dispari non sono divisibili per 2.

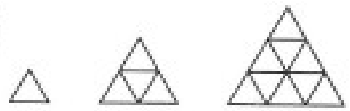
ANNA HA SEMPRE UN NUMERO PARI DI CECI

BEA PUÒ AVERNE QUALSIASI NUMERO

Tabulare … meritoria attività … da sfruttare !

R E G O L A R I T à – RELAZIONI - STRUTTURE

15

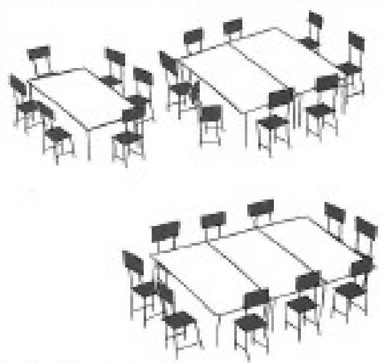


1. 2. 3.

La prima figura è un triangolo equilatero. Scrivi sulla tabella con quanti triangoli delle stesse dimensioni del primo si forma la configurazione richiesta.

Numero della configurazione	Numero triangoli
1	1
2	4
3	
4	
5	
10	
n	

16



Completa la tabella.

Numero di tavoli	Numero di sedie
1	6
2	8
3	
4	
10	
n	

17

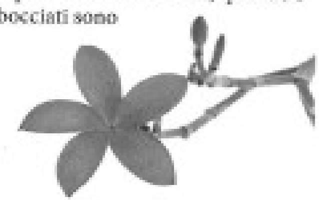
1. 2. 3.

Quanti pallini ci sono
a) nella quarta configurazione
b) nella sesta configurazione
c) nella centesima configurazione
d) nella n-esima configurazione?

ESERCIZI IN PIÙ PER …

Trovare leggi matematiche

18 Quanti petali ci sono in tutto, quando i fiori sbocciati sono
a) 2
b) 3
c) 4
d) 10
e) n?



19 Ogni mazzo contiene 52 carte. Quante sono le carte se i mazzi sono
a) 2
b) 3
c) 5
d) n?

20 Trova la legge e completa.

a)

1	7
2	14
3	21
4	
n	

b)

1	2
2	3
3	4
11	
n	

c)

1	10
3	30
6	
100	
n	

21 Inventa una legge matematica e completa una tabella sul modello dell'esercizio 20.

22 Trova la legge e completa.

a)

1	2
2	5
3	8
4	
n	

b)

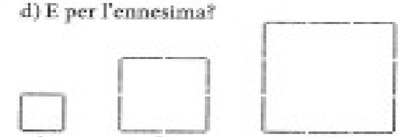
1	7
2	8
3	9
10	
n	

c)

1	0
2	3
3	8
4	15
5	24
6	
n	

23 Quali sono i successivi tre termini della serie?
a) 5, 10, 15, 20, … c) 1, 3, 5, 7, …
b) 1, 4, 9, 16, …

24 a) Quanti trattini occorrono per la quarta configurazione?
b) E per la sesta?
c) E per la decima?
d) E per l'ennesima?

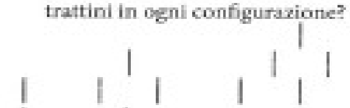


1. 2. 3.

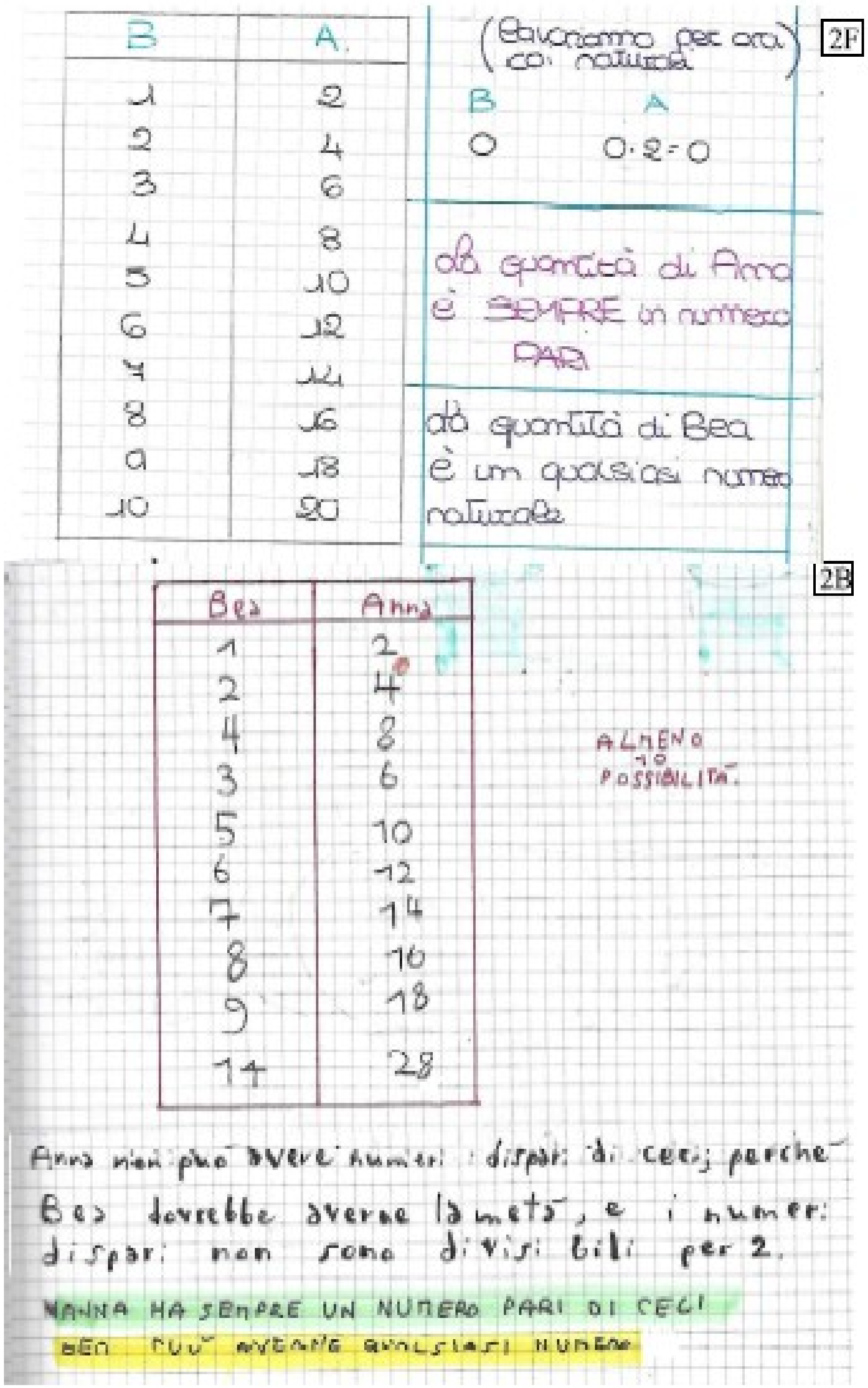
25 a) Quanti trattini occorrono per la quarta configurazione?
b) E per la sesta?
c) E per la decima?
d) E per l'ennesima?

1. 2. 3.

26 Disegna la quarta configurazione.
a) Quanti trattini occorrono?
b) Sapresti dire a parole quale legge permette di calcolare il numero di trattini in ogni configurazione?



1. 2. 3.



B	A
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12
7	14
8	16
9	18
10	20

(lavoriamo per ora coi naturali)

B	A
0	0·2=0

la quantità di Anna è SEMPRE un numero PARI

la quantità di Bea è un qualsiasi numero naturale

2F

2B

Bea	Anna
1	2
2	4
4	8
3	6
5	10
6	12
7	14
8	16
9	18
14	28

ALMENO 10 POSSIBILITÀ

Anna non può avere numeri dispari di ceci, perché Bea dovrebbe averne la metà, e i numeri dispari non sono divisibili per 2.

ANNA HA SEMPRE UN NUMERO PARI DI CECI

BEA PUÒ AVERNE QUALSIASI NUMERO

Se Bea ha 15 ceci, Anna quanti ne ha?
Può averne un numero diverso?

Bea 15 Anna 30 → una coppia di valori

Se Anna ne ha 30, Bea quanti ne ha?

Anna 30 Bea 15

(CORRISPONDENZA BIUNIVOCA)

Ma allora esistono coppie di Anna e Bea.

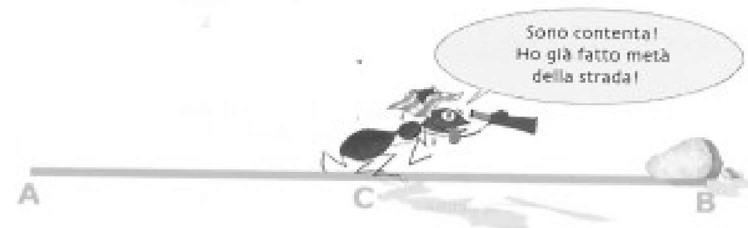
Quindi i pari (Anna) sono tanti quanti i naturali (Bea)
!!

p.s.: ma Euclide non diceva
che una parte è minore del tutto?

Emma Castelnuovo e l'infinito (1)

Un'addizione di infiniti numeri frazionari. „ il problema della formica“ . Numeri A, pag. 82.

Un'addizione di infiniti numeri frazionari. «Il problema della formica»



Una formica si trova in A (fig. 1) e vuole raggiungere una mollica di pane che si trova in B, a 1 metro di distanza.

Si mette in cammino e, una volta arrivata alla metà, in C, pensa: «sono contenta; ho già fatto la metà del cammino».

Quando da C si avvia verso B, passa per D, punto medio.

In quell'istante ha già fatto:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

e cioè i $\frac{3}{4}$ del cammino.

Da D a B passerà per E, e in quell'istante avrà fatto:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

del cammino.

Ma allora – ci si chiede – la formica arriverà mai in B?

Il cammino che deve percorrere, in-

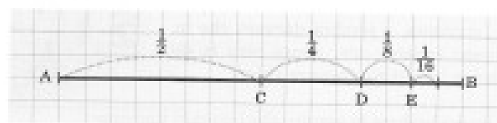


Figura 1

fatti, sembra infinito perché è lungo:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$$

È vero che i tratti vanno, ogni volta, rimpicciolendosi, ma è anche vero che sono infiniti.

D'altra parte, basta il buon senso per capire che la nostra formica arriverà certamente in B.

Si capisce allora che:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$$

non ha valore infinito!

Si ha:

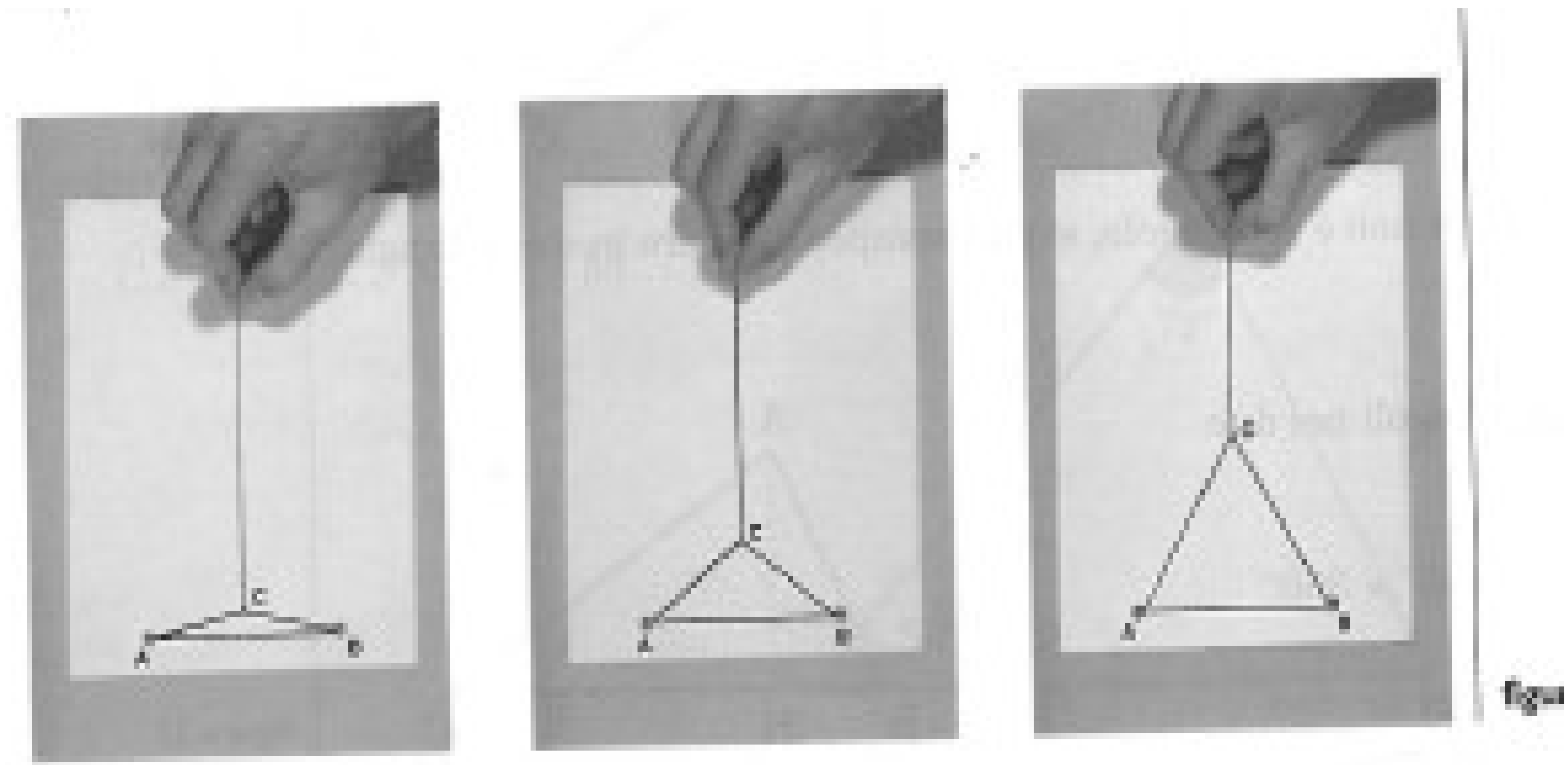
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots=1$$

I termini sono infiniti e però...

Emma Castelnuovo e l'infinito (2)

Modelli geometrici. Figure A.

Figure B. La somma degli angoli interni di un triangolo col modello dinamico.
Figure B. Gli specchi.



E se potessimo trascinare il vertice mobile in alto in alto in alto in alto …. che cosa accadrebbe ai lati uguali e agli angoli alla base?

In particolare, la matematica dà strumenti per la <u>descrizione scientifica del mondo</u> e per affrontare <u>problemi utili nella vita quotidiana</u>; contribuisce a sviluppare la capacità di <u>comunicare e discutere</u>, di <u>argomentare in modo corretto</u>, di <u>comprendere i punti di vista</u> e le argomentazioni degli altri.

<u>Indicazioni Nazionali 2012</u>

«Ma *se si deve scegliere tra rigore e significato, scelgo quest'ultimo senza esitare»*. Renè Thom

Tabulare: un'attività semplice ma potente

Problemi rally matematico su sequenza o seriazioni … anche geometriche, con cui tabulare

Toffalori

Contare e confrontare… anzi confrontare per contare

Cantor, *Contributo alla teoria delle molteplicità*, 1878: *"Mi sia concesso, se due insiemi M e N possono essere associati l'uno all'altro in modo univoco e completo, elemento per elemento (cosa che se è possibile in una maniera lo è sempre anche in molte altre), di dire d'ora in poi che tali insiemi hanno uguale potenza, o anche che sono equivalenti."*

Piero ha un orologio a pendolo che segna:

- la mezzora di ciascuna ora, suonando un colpo;
- l'ora, suonando il numero di colpi indicato dalla lancetta corta

A mezzogiorno o a mezzanotte la pendola batte 12 colpi.

A mezzogiorno e mezzo, suona 1 colpo.

Alle ore 13 suona 1 colpo perché è l'una del pomeriggio.

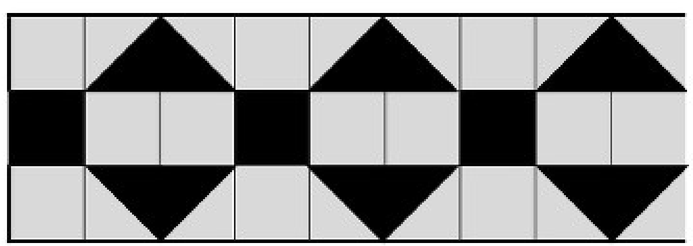
Piero carica la pendola ogni giorno tra mezzogiorno e mezzogiorno e mezzo.

Quanti colpi batte la pendola tra due successivi interventi di Piero?

Mostrate chiaramente come avete proceduto.

Su un foglio quadrettato del suo album da disegno, Anna disegna una cornicetta di due colori, nero e grigio.

Ecco l'inizio della cornicetta:



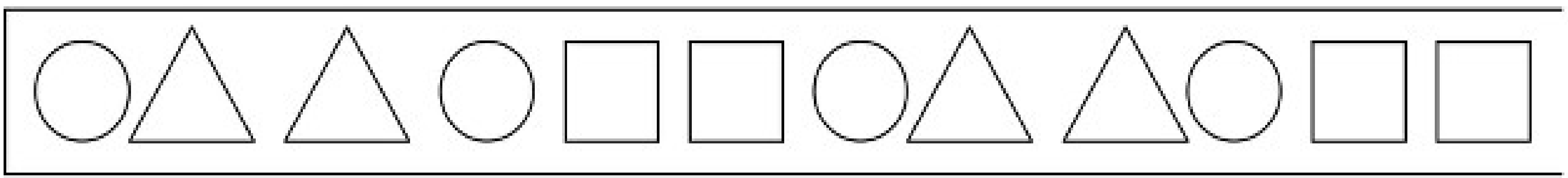
Anna osserva che in questa prima parte la zona colorata di nero corrisponde a 9 quadretti.

Anna continua a disegnare la cornicetta fino alla fine del foglio e quando finisce osserva che la zona colorata di nero corrisponde a 58 quadretti.

Nella cornicetta completa a quanti quadretti corrisponde la zona colorata di grigio?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Nella stanza da bagno di Filippo c'è una lunga striscia di piastrelle ornamentali con cerchi, triangoli e quadrati.
Le figure si alternano in questo modo: un cerchio, poi due triangoli, poi un cerchio, poi due quadrati e si ricomincia con un cerchio, due triangoli, un cerchio, due quadrati e così via, come si vede nel disegno.



Filippo conta tutte le figure presenti sulla striscia. Comincia a contare da un cerchio seguito da due triangoli (e sono già tre figure), poi continua fino alla fine della striscia.
Conta in tutto 100 figure.

Che forma avrà l'ultima figura contata da Filippo?

Quanti cerchi, quanti triangoli e quanti quadrati ci sono sull'intera striscia?

Spiegate come avete trovato le vostre risposte.

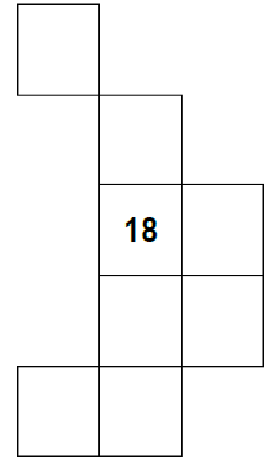
Verbalizzazione

Progetto ArAl

La griglia die numeri!

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

2. Questo è un pezzo di griglia 8x8. Completa con la rappresentazione canonica



Verbalizzazione

Progetto ArAl

La griglia die numeri!

es. 9

è una 7x7 perchè 20 -1 il risult. è fa 19, tra 12e 19 la differenza è 7.

è una 6x6 perchè da 19 andando facendo ~~-1~~ indietro di 2(-2) si arriva a 13, tra 7 e 13 la differenza è 6.

è una 12x12 perchè per andare giù di 1(↓) bisogna fare + il n° di colonne e per andare a destra + 1(

9. A quali griglie appartengono questi frammenti?
Spiega il tuo procedimento.

	12	
		20

		16
25		

		a
	a+29	

Motivazioni

Nella prima tra l'11 e il 18 c'è differenza di 7 e visto che quando ci si sposta a sud si aggiunge 7 e il 18 era di una casella più a sud di 11 è una tabella 7X7 perchè si aggiunge 7 nella tabella 7X7

Nella seconda tra 14 e 25 c'è differenza di 11 e visto che quando ci si sposta a sud nella tabella 11X11 si aggiunge 11 è una tabella 11X11

Nella terza mi sono spostata 2 volte a sud e ho sottratto una con diverse griglie e mi è tornata la 15X15

9

Nelle tue spiegazioni metti sempre un esempio o il calcolo che hai fatto!

1 è la griglia 7X7 perché se vai a sud devi fare + il numero di colonne

2 è la griglia 6x6 perché se vai a sud devi fare + il numero di colonne

3 è la griglia 12 x 12 perché se vai a sud devi fare + il numero di colonne

Nella tabella di moltiplicazione “dei numeri che parlano”, 36 e 40 hanno già trovato dove sistemarsi.

Il numero 40 dice al numero 36: *Tu figuri solo tre volte nella tabella di moltiplicazione dei numeri da 1 a 10. Io invece ci sono quattro volte e valgo 4 più di te.*

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4									***36***	***40***
5								***40***		
6						***36***				
7										
8					***40***					
9				***36***						
10				***40***						

Quali sono i numeri di questa tabella che possono dire la stessa frase ad un altro, quando la tabella sarà completata?

Indicate tutti i numeri che figurano quattro volte nella tabella e che valgono 4 di più di un numero che vi figura tre volte.

Spiegate come li avete trovati.

Giulia ha constatato che nella tabella di moltiplicazione dei numeri da 1 x 1 a 10 x 10, alcuni numeri figurano una sola volta, per esempio l'1, il 49, il 100. Altri numeri figurano due volte, per esempio il 2, il 3, il 14; altri figurano tre volte, per esempio il 4, il 9, il 16, e altri ancora quattro volte, per esempio il 6, il 20. Ma in tale tabella non ci sono numeri che figurano più di quattro volte.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	***1***	***2***	***3***	***4***		***6***			***9***			
2	***2***	***4***	***6***				***14***	***16***		***20***		
3	***3***	***6***	***9***									
4	***4***			***16***	***20***							
5				***20***								
6	***6***											
7		***14***					***49***					
8		***16***										
9	***9***											
10		***20***										
11												
12												

La tabella di Giulia, da1 x 1 a 10 x 10 (quadrato con tratteggio ispessito) e

la tabella di sua nonna, da 1 x 1 a 12 x 12

Sua nonna le dice che quando era giovane, aveva imparato la tabellina da 1 x 1 a 12 x 12, nella quale ci sono dei numeri che figurano più di quattro volte.

Segnate in rosso tutti i numeri che figurano cinque volte nella tabella della nonna di Giulia, se ce ne sono.

Segnate in blu quelli che appaiono sei volte, nella tabella della nonna, se ce ne sono.

Segnate in verde quelli che appaiono due volte nella tabella di Giulia e quattro volte nella tabella della nonna, se ce ne sono.

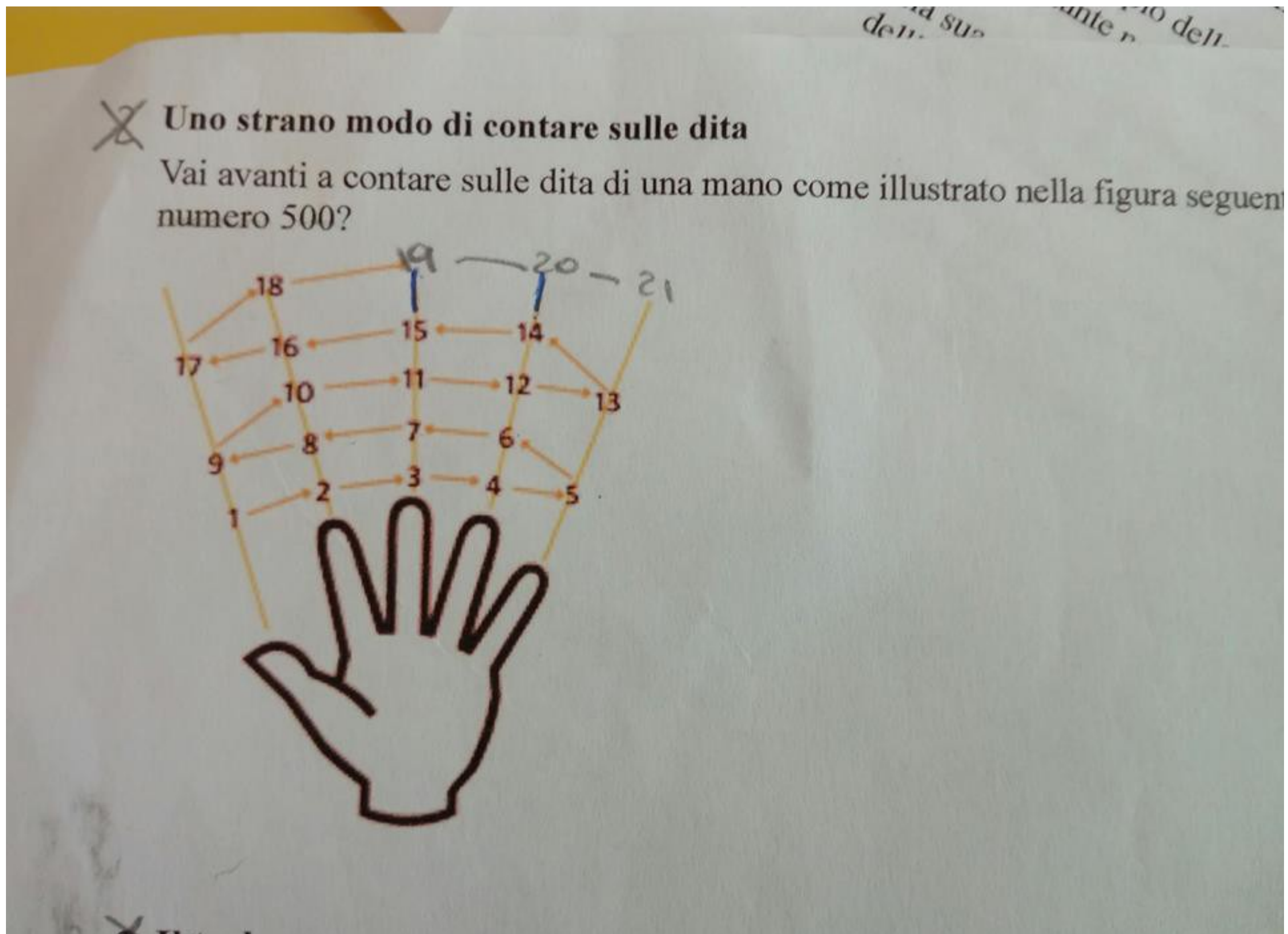
Il nonno di Andrea, che soffre di insonnia, invece di “contare le pecore” ha escogitato un sistema originale per addormentarsi:

conta 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ….. e intanto batte le dita della mano destra sul bordo del letto seguendo quest’ordine:

“pollice, indice, medio, anulare, mignolo, anulare, medio, indice, pollice, indice, medio…”

Quale dito corrisponderà al numero 152? E quale corrisponderà al numero 3251?

Spiegate come avete trovato le vostre risposte.



QUANDO SI PASSEGGIA L'IMPORTANTE È PASSEGGIARE, NON ARRIVARE

ANALOGIA QUANDO SI FA UN PROBLEMA "RAGIONARCI"

I $\quad 2 \xrightarrow{6} 8 \xrightarrow{2} 10 \xrightarrow{6} 16 \xrightarrow{2} 18$

$\underbrace{6 + 2}_{8} \quad \underbrace{6 + 2}_{8}$

A $\quad 4 \xrightarrow{2} 6 \xrightarrow{6} 12 \xrightarrow{2} 14 \xrightarrow{6} 20$

$\underbrace{2 + 6}_{8} \quad \underbrace{2 + 6}_{8}$

Se faccio 500 : 8 trovo i salti ogni 2 volte che torno sul dito.

62,5

$62 \cdot 8 = 496$

$500 - 496 = 4$ (A)

Il numero 500 sarà sull'anulare.

erchio

5° , 1ai

e 90°

oito (L'ANGOLO)

EQ

ES 2

DITO

500 ?

1° NO

DOE ~~primo~~ al 3° numero su ogni dito

I M A

c'è 8

DAL 1° e 2° N P MI DITO

X P 1 9

1 2 8 10

X M 3 7 11

A 4 6 12

X M 5 13

+6	// P	1 9 17
+4	I	2 8 10 16
+2	// M	3 7 11 19
	A	4 6 12 ~~14~~ 20
	// M	5 13 21

IL 500 STARÀ SUI NUMERI PARI:

AN / I

NEL POLL. E NEL MI.

AUMENTO SEMPRE DI 8 DA UN

NUMERO DISPARI.

SUL POLLICE E SUL MI. NON

CI PUÒ STARE. (500)

NEL M AUMENTO SEMPRE

4 DA UN NUMERO DISPARI

COMPITI DELLE VACANZE DI MATEMATICA.

1) VAI AVANTI A CONTARE SULLE DITA DI UNA MANO, SU QUALE DITO SI TROVERÁ IL NUMERO 500? 5+4+4+
4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+
4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+
4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+
4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+
4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+
4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+
4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+
4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+
4+4+4+4+4+4+4+4+4=497 R 3.

QUINDI IL NUMERO 500 SARÁ SULL'ANULARE. L'HO CA= PITO SCRIVENDOMI TUTTO SOPRA. PER PRIMA COSA HO CERCATO UNA REGOLARITÁ NEL CONTARE SULLE DITA. LA PRIMA VOLTA LE CONTAVE TUTTE E CINQUE LE DITA POI CONTINUAVI CONTANDONE SOLO QUATTRO PER NON RI= PETERE SEMPRE LE STESSE. COSÍ HO CONTINUATO FINO A CHE NON SONO ARRIVATO A 497. A QUEL PUNTO MI SONO FERMATO VISTO CHE AVREI SUPERATO IL 500.

QUESITO:

COME SI COMPORTANO LE DECINE?
SI "MUOVONO" COME LE CENTINAIA

- COMPILA LO SCHEMA CON LE DECINE FINO A 100

90 →	100 →
← 80	← 70
50 →	60 →
← 40	← 30
10 →	20 →

PO IN ME AN MI

CONCLUSIONE

- PER CONTARE LE DECINE MI SPOSTO DI DUE DITA
- PER CONTARE LE CENTINAIA MI SPOSTO DI QUATTRO DITA

QUESITO:

QUANTE DITA OCCORRONO PER COMPLETARE UN GIRO DELLA MANO?

9 DITA

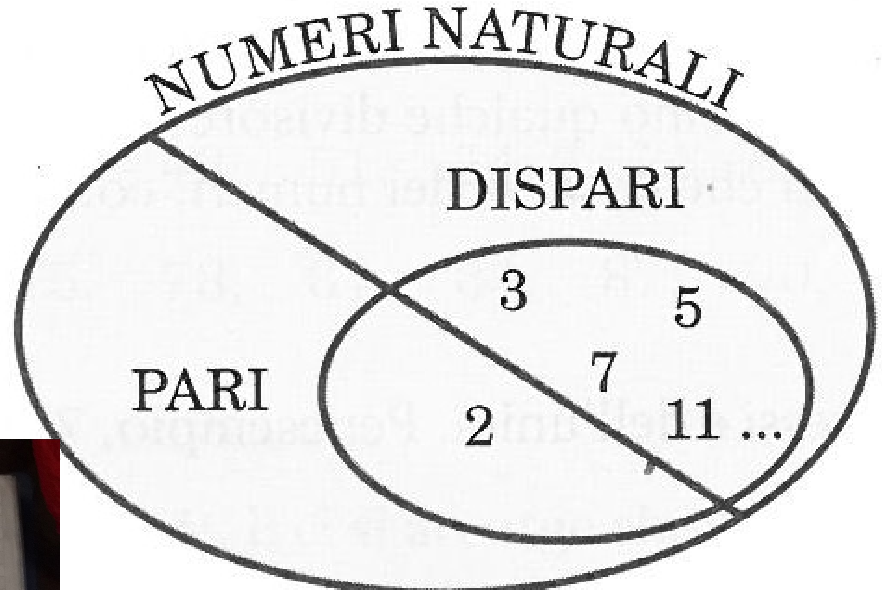
LE NOSTRE RISPOSTE

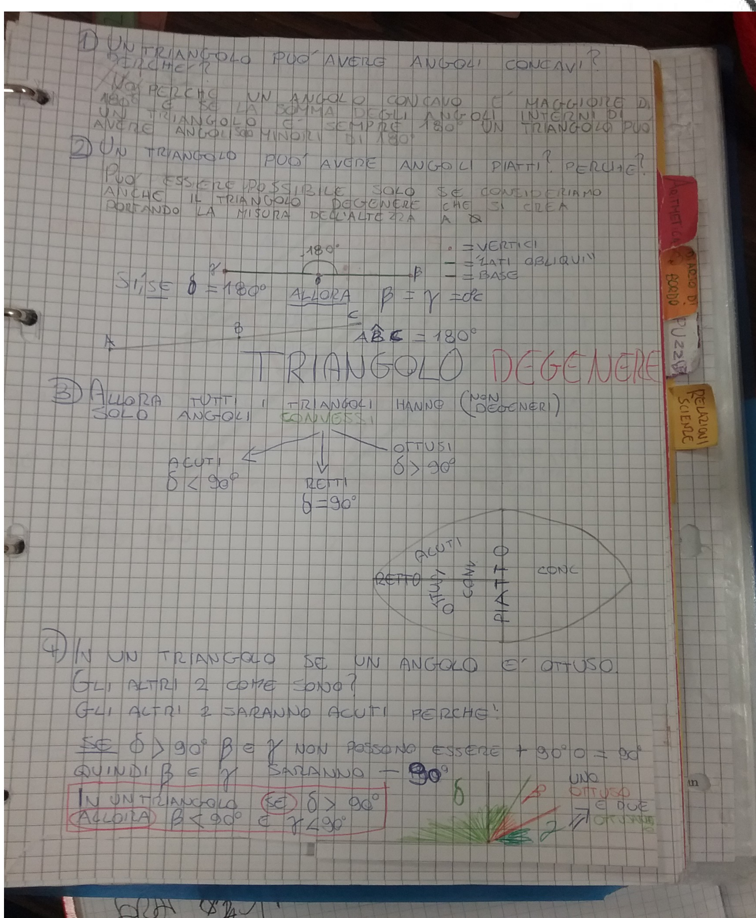
- 9 DITA: PARTO DAL POLLICE E TORNO SUL POLLICE
- 8 DITA: SUL POLLICE CI SONO L'1 E IL 9 QUINDI DA PO A PO CI SONO 9 - 1 = 8 DITA

SCRIVIAMO LA SEQUENZA

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
PO	IN	ME	AN	MI	AN	ME	IN	PO	IN	ME	AN	MI	AN	ME	IN	PO

Abbiamo illustrato con un diagramma la situazione dei numeri primi; si vede come l'unico numero pari che sia primo è il numero 2.





Tagli … sezioni … di Dedekind? Forse … Utili, certo!

Sitografia

Banca problemi Rally Matematico Transalpino

www.projet-ermitage.org/ARMT/bp-it2.html

Progetto ArAl

www.progettoaral.it

„Progetto ArAl“

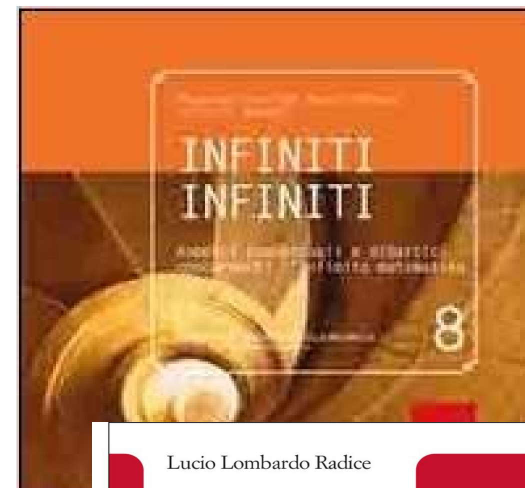
Banca gestionale Invalsi

www.gestinv.it

Bibliografia

Codenotti & Flandoli
Archimede aveva un sacco di tempo libero. La teoria degli insiemi e il concetto di infinito. Sironi Ed.

Arrigo, D'Amore & Sbaragli
Infiniti infiniti. Aspetti concettuali e didattici concernenti l'infinito matematico. Erickson ed.



Lombardo Radice
L'infinito. Itinerari matematici e filosofici di un concetto di base. Ed. Riuniti