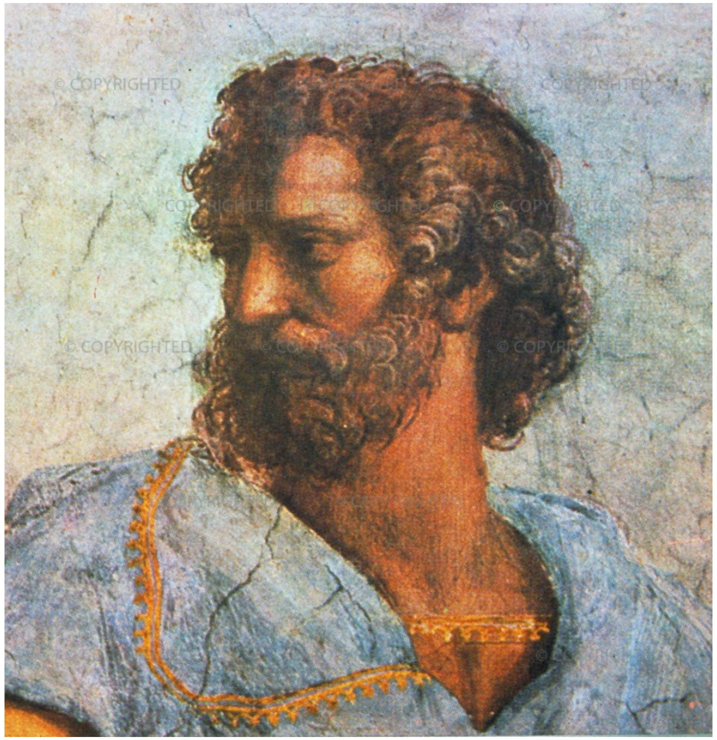
CANTOR, L'INFINITO E LA SCUOLA DI OGGI

Carlo Toffalori

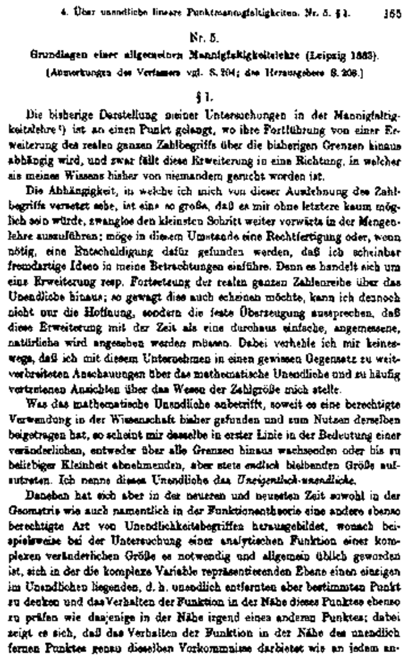
Cantor nella scuola di oggi
Firenze, 11 ottobre 2018

David Hilbert, *Sull’infinito*, 1925

- *“Dal paradiso che Cantor ha creato per noi, nessuno deve poterci mai scacciare”.*
- La teoria di Cantor dei numeri transfiniti *“mi appare come il fiore più bello dello spirito matematico e in generale una delle più alte prestazioni dell’attività puramente intellettuale dell’uomo”*.



- Il dettato di Aristotele e della Scolastica: *“infinitum actu non datur”*.
- Georg Cantor: *“Omnia seu finita seu infinita definita sunt et excepto Deo ab intellectu determinari possunt”*



4. Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. Nr. 5. § 1. 165

Nr. 5.

Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (Leipzig 1883).

(Anmerkungen des Verfassers vgl. S. 204; des Herausgebers S. 208.)

§ 1.

Die bisherige Darstellung meiner Untersuchungen in der Mannigfaltigkeitslehre [1]) ist an einen Punkt gelangt, wo ihre Fortführung von einer Erweiterung des realen ganzen Zahlbegriffs über die bisherigen Grenzen hinaus abhängig wird, und zwar fällt diese Erweiterung in eine Richtung, in welcher sie meines Wissens bisher von niemandem gesucht worden ist.

Die Abhängigkeit, in welche ich mich von dieser Ausdehnung des Zahlbegriffs versetzt sehe, ist eine so große, daß es mir ohne letztere kaum möglich sein würde, zwanglos den kleinsten Schritt weiter vorwärts in der Mengenlehre auszuführen; möge in diesem Umstande eine Rechtfertigung oder, wenn nötig, eine Entschuldigung dafür gefunden werden, daß ich scheinbar fremdartige Ideen in meine Betrachtungen einführe. Denn es handelt sich um eine Erweiterung resp. Fortsetzung der realen ganzen Zahlenreihe über das Unendliche hinaus; so gewagt dies auch scheinen möchte, kann ich dennoch nicht nur die Hoffnung, sondern die feste Überzeugung aussprechen, daß diese Erweiterung mit der Zeit als eine durchaus einfache, angemessene, natürliche wird angesehen werden müssen. Dabei verhehle ich mir keineswegs, daß ich mit diesem Unternehmen in einen gewissen Gegensatz zu weitverbreiteten Anschauungen über das mathematische Unendliche und zu häufig vertretenen Ansichten über das Wesen der Zahlgröße mich stelle.

Was das mathematische Unendliche anbetrifft, soweit es eine berechtigte Verwendung in der Wissenschaft bisher gefunden und zum Nutzen derselben beigetragen hat, so scheint mir dasselbe in erster Linie in der Bedeutung einer veränderlichen, entweder über alle Grenzen hinaus wachsenden oder bis zu beliebiger Kleinheit abnehmenden, aber stets *endlich* bleibenden Größe aufzutreten. Ich nenne dieses Unendliche das *Uneigentlich-unendliche*.

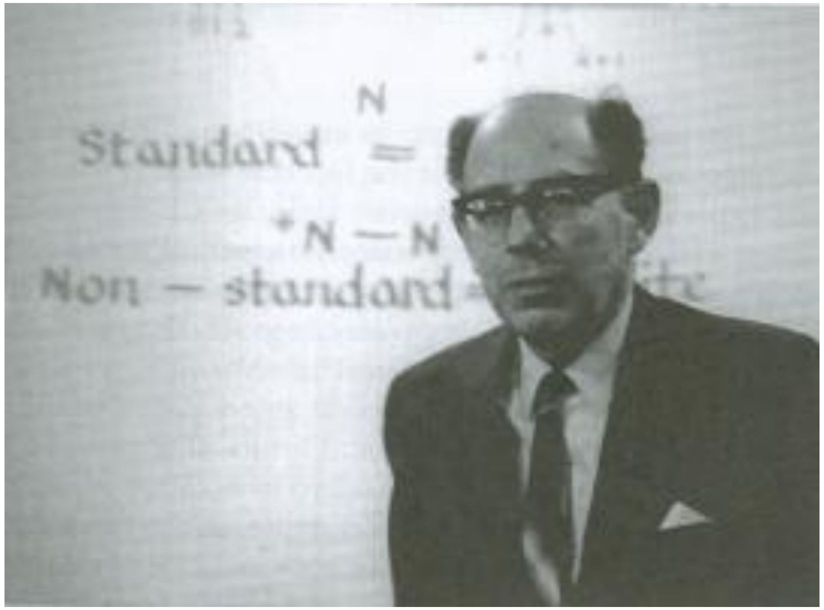
Daneben hat sich aber in der neueren und neuesten Zeit sowohl in der Geometrie wie auch namentlich in der Funktionentheorie eine andere ebenso berechtigte Art von Unendlichkeitsbegriffen herausgebildet, wonach beispielsweise bei der Untersuchung einer analytischen Funktion einer komplexen veränderlichen Größe es notwendig und allgemein üblich geworden ist, sich in der die komplexe Variable repräsentierenden Ebene einen einzigen im Unendlichen liegenden, d. h. unendlich entfernten aber bestimmten Punkt zu denken und das Verhalten der Funktion in der Nähe dieses Punktes ebenso zu prüfen wie dasjenige in der Nähe irgend eines anderen Punktes; dabei zeigt es sich, daß das Verhalten der Funktion in der Nähe des unendlich fernen Punktes genau dieselben Vorkommnisse darbietet wie an jedem an-

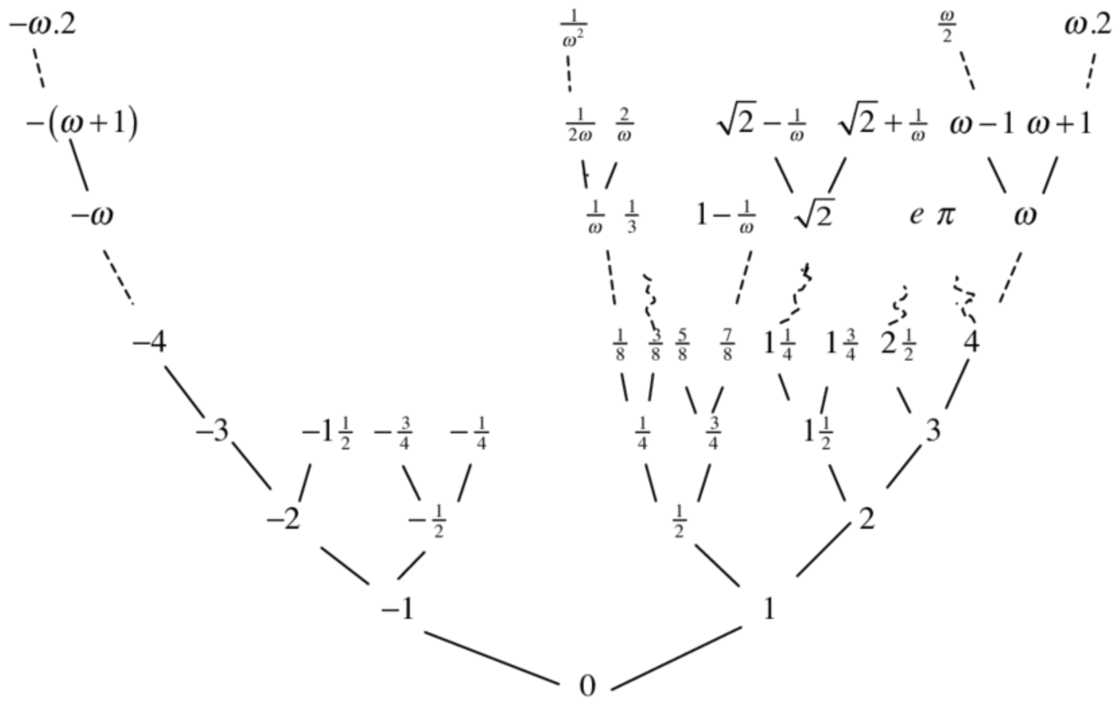
La frase si trova nelle *Grundlangen* (i *Fondamenti di una teoria generale delle molteplicità*, 1883) di ***Georg Cantor (1845-1918)***:

- il quinto, e il più ampio, bello e significativo, di una serie di 6 articoli *Sulle molteplicità lineari infinite di punti*
- discute e spiega come e perché l'infinito possa diventare l'oggetto dell'analisi scientifica.

Non l'unica via possibile verso l'infinito attuale. Qualche esempio di approcci alternativi:

- i ***numeri iperreali***, o anche solo ***iperinteri***, dell'*analisi non standard* di Abraham Robinson (tra l'altro, il 2018 è anche il centenario della nascita di Robinson),





- i ***numeri surreali*** di Conway,
- ***numerosità*** e ***grossoni***,
- etc. etc.

Eppure la prima, rivoluzionaria e memorabile teoria dell'infinito, che lascia un'impronta profonda nella matematica del Novecento e di oggi.

Tre possibili infiniti secondo Cantor:

- l'*infinito improprio*, cioè potenziale,
- l'Infinito trascendente e inaccessibile di Dio
- ma anche l'*infinito proprio*, attuale, che la mente può accostare, determinare e quindi studiare.

I numeri transfiniti sono *"pensabili"* e hanno pieno diritto di cittadinanza nel nostro intelletto, al pari dei numeri interi.

Il tributo di Zermelo a Cantor, 1932

"Nella storia della scienza è un caso veramente raro che un'intera disciplina di importanza fondamentale sia dovuta all'opera creativa di una sola persona. Questo caso si è verificato con la teoria degli insiemi creata da Georg Cantor."

Cantor, *Grundlagen*, la coscienza della novità della strada intrapresa: *"un ampliamento del concetto di numero intero effettivo al di là dei limiti che esso ha avuto finora, ampliamento che va in una direzione mai tentata, per quanto ne so, da nessuno."*

In effetti, prima di Cantor soltanto presagi: un esempio.

Il paradosso di Galileo: tanti naturali quanti quadrati (G. Galilei, 1638,*"Queste sono di quelle difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno all'infinito, dandogli di quegli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate: il che penso che sia inconveniente"*)

La prima aritmetica dell'infinito, criticabile e imperfetta: Bernard Bolzano, *I paradossi dell'infinito*

Cantor vuole seguire quella strada, ma in modo del tutto originale, tenace e convinto.

Non solo gli entusiasmi di Hilbert…anche critiche, polemiche, ostracismi

L'ostilità di Kronecker e di chi rifiuta lo studio matematico dell'infinito
Convegno a Berlino, 1886: *"Dio creò i numeri interi, tutto il resto è opera dell'uomo"*.

Le riserve di Poincaré

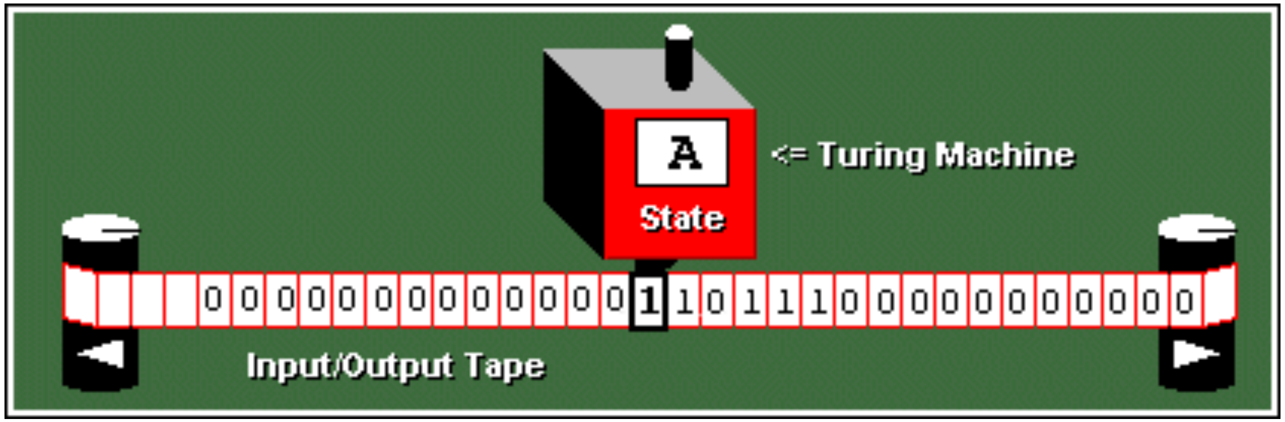
Poincaré sul cantorismo, 1908: *“Per conto mio io penso, e non sono il solo, che l’importante è di non introdurre mai che delle entità che si possano definire completamente con un numero finito di parole.”*

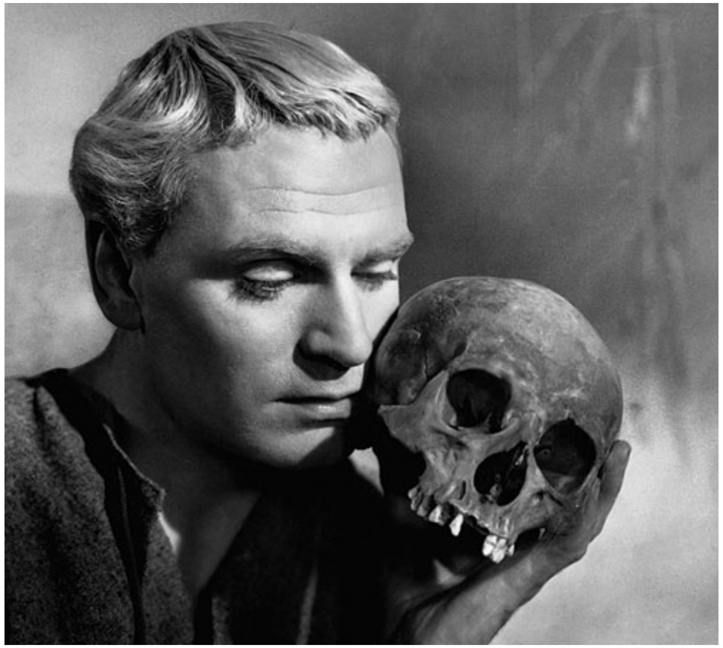
Passando al 2018… quale attualità ha il messaggio di Cantor nella scuola di oggi?

- Fino a che punto servono diagrammi di Eulero-Venn ed esercizi su unioni, intersezioni, complementi?
- I primi seri fondamenti della teoria degli insiemi sono difficili da presentare.

E ancora

- i ragazzi di oggi sembrano prediligere l'efficienza dei computer, e la loro capacità di immagazzinare e fornire quantità inimmaginabili di dati e informazioni, a speculazioni troppo teoriche…





W. Shakespeare, *Amleto*: *“Ci son più cose in cielo e in terra, Orazio, che non ne sogni la tua filosofia”*. E ancor più nel cervello di un computer!

O forse è vero il contrario? Cantor: *“si possono eseguire conteggi altrettanto determinati su insiemi sia finiti che infiniti”* anche dove un computer non arriva…

- Il numero di operazioni elementari che un super-computer esegue al secondo: al più 10^{17}
- L'età del mondo in secondi: al più 10^{19}
- Il numero delle particelle dell'universo (*"le cose in cielo e in terra"*): al più 10^{82}

Se ognuna contenesse un computer al lavoro dall'inizio del mondo… al più 10^{118} operazioni elementari. E dopo?

H. M. Enzensberger, *Gli elisir della scienza*, *Ponte levatoio fuori servizio ovvero La matematica nell'aldilà della cultura*

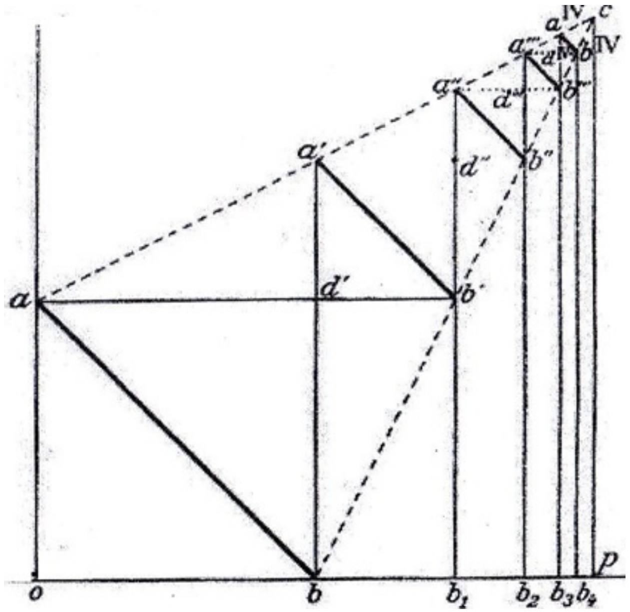
"Pare essere un'idea fissa della pedagogia che i bambini non siano capaci di pensiero astratto. Mentre si tratta di una convinzione infondata. E' semmai giusto il contrario. ***Il concetto dell'infinitamente grande e dell'infinitamente piccolo è, per esempio, immediatamente accessibile a livello intuitivo per qualunque scolaro di nove o dieci anni.****"*

Ancora Enzensberger, *Il mago dei numeri*: a un ragazzo che odia *"qualsiasi cosa abbia a che fare con la matematica"* si svelano poco alla volta

- gli arcani dell'infinito (tanti numeri interi quanti pari, o dispari),
- addirittura il *pulviscolo di Cantor*.

Contare e confrontare… anzi confrontare <u>per</u> contare

Cantor, *Contributo alla teoria delle molteplicità*, 1878: *“Mi sia concesso, se due insiemi M e N possono essere associati l’uno all’altro in modo univoco e completo, elemento per elemento (cosa che se è possibile in una maniera lo è sempre anche in molte altre), di dire d’ora in poi che tali insiemi hanno uguale potenza, o anche che sono equivalenti.”*



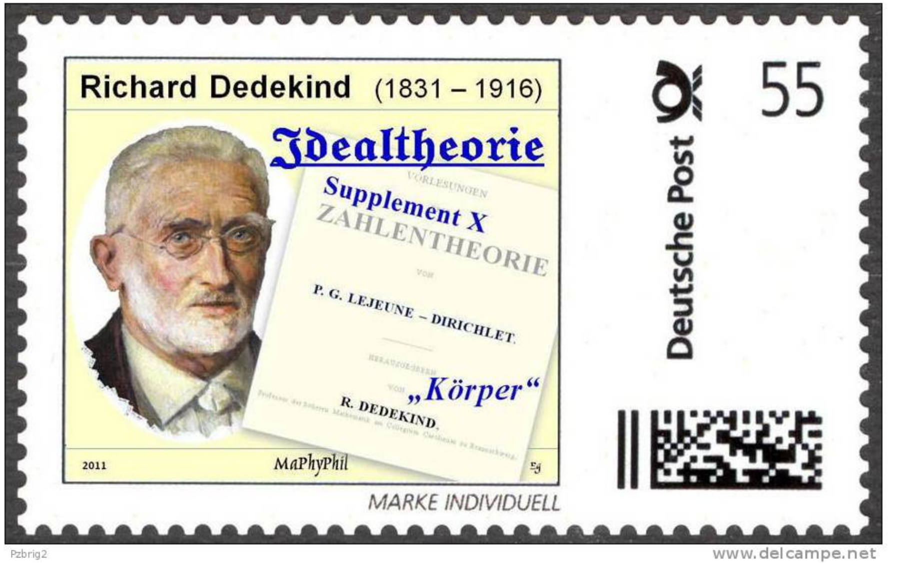
Miriadi di esempi: hanno uguale cardinalità

- $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^2$ (la *biiezione di Cantor*, 1878)
- $\mathbb{R}$. e $\mathbb{R}^2$ (*“je le vois, mais je ne le crois pas”*, Cantor a Dedekind, 1877 e 1878)

o anche, per passare a casi talora più semplici,

- $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ (l'*albergo di Hilbert*),
- $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, pari e dispari,
- $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$,
- la retta reale e un suo qualsiasi intervallo anche minuscolo (la funzione arcotangente),
- $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$.

Tra l'altro, possibili applicazioni ai moderni calcolatori per numerare, codificare, …: davvero (pitagoricamente) *"tutto è numero"*?



A proposito di reali e di Dedekind: da non dimenticare l'introduzione rigorosa dei numeri reali a partire da $\mathbb{Q}$, 1872,

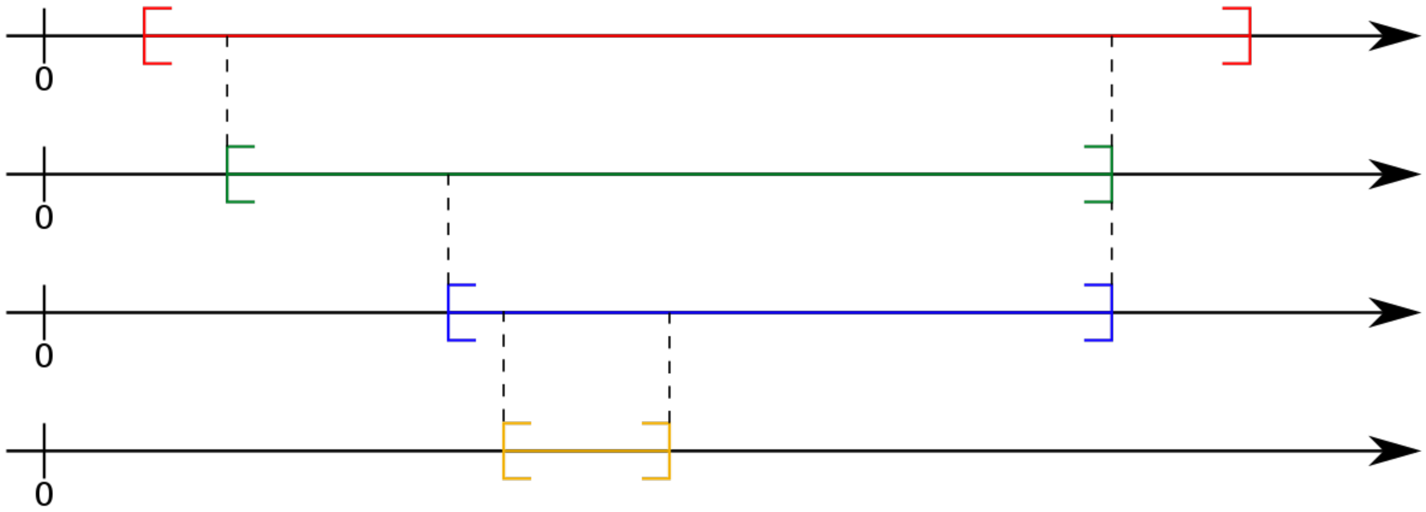
- Cantor, attraverso le *successioni di Cauchy*,
- appunto Dedekind, attraverso le *sezioni*.

Si insegnano ancora i numeri reali? Eppure sono

- una rivoluzione della storia del pensiero (Hardy e il teorema di Pitagora),
- ispirati dalla natura ($\sqrt{2}$, il numero aureo, π, e, …)

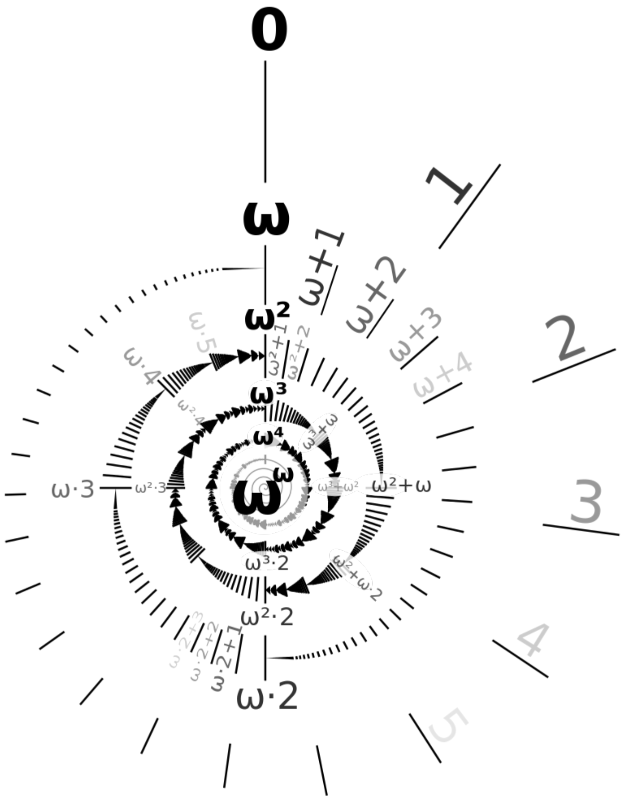
Ma torniamo all'infinito… già nel 1874, in *Su una proprietà della classe di tutti i numeri reali algebrici*, troviamo (a posteriori) la prova dell'esistenza di almeno due potenze (***cardinalità***) infinite distinte

- quella ***numerabile*** di $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, …
- la ***potenza del continuo*** di $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, …



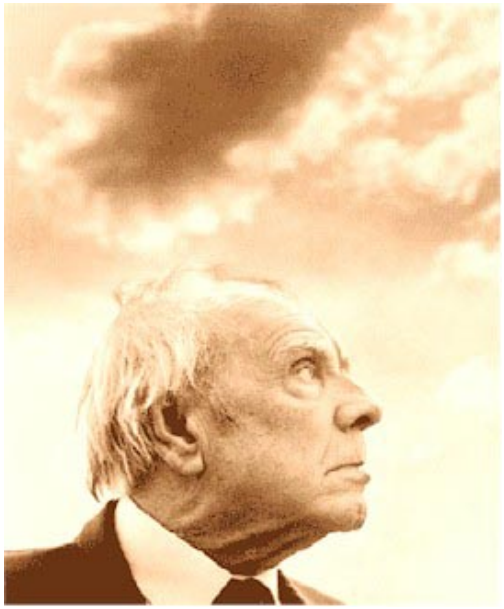
Per la storia: la dimostrazione col metodo della ***diagonalizzazione*** è in un articolo del 1890-91 (che prova anche l’esistenza di un infinitudine di cardinalità infinite) e si riferisce alle successioni di 0 e 1 (m e w nella formulazione originaria di Cantor).

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
E_0 = & m & m & m & m & m & m & m & m & m & m & m & m & \cdots \\
E_1 = & w & w & w & w & w & w & w & w & w & w & w & w & \cdots \\
E_2 = & m & w & m & w & m & w & m & w & m & w & m & w & \cdots \\
E_3 = & w & m & w & m & w & m & w & m & w & m & m & w & \cdots \\
E_4 = & w & m & m & w & w & m & m & w & m & w & m & w & \cdots \\
E_5 = & m & w & m & w & w & m & w & m & w & m & w & m & \cdots \\
E_6 = & m & w & m & w & w & m & w & w & m & w & m & w & \cdots \\
E_7 = & w & m & m & w & m & w & m & w & m & w & m & w & \cdots \\
E_8 = & m & m & w & m & w & m & w & m & w & m & w & m & \cdots \\
E_9 = & w & m & w & m & m & w & w & m & w & w & m & w & \cdots \\
E_{10} = & w & w & m & w & m & w & m & w & m & m & w & m & \cdots \\
E_{11} = & m & w & m & w & w & m & w & m & m & w & m & m & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
E_u \neq & w & m & w & w & m & w & m & m & m & m & m & w & \cdots
\end{array}
$$



La teoria dei cardinali e degli ordinali si sviluppa e affina ne

- le già citate ***Grundlagen***, 1883,
- i ***Beiträge*** (*Contributi alla fondazione della teoria dei numeri transfiniti*), 1895-97.



Questi ultimi non sono certo argomenti da ragazzi… Eppure anche a loro si possono forse

- evocare $\aleph_0$, ω e *"i vasti numeri che un uomo immortale non raggiungerebbe nemmeno se consumasse la sua eternità contando"* (Borges, *La cifra*, *Nihon*),
- azzardare esempi suggestivi come $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ (l'albergo di Hilbert) oppure $\omega + 1 \neq 1 + \omega$ (è differente aggiungere all'ordine dei numeri naturali un massimo anziché un minimo).

Eredità cantoriane*: il senso della matematica* (sempre dalle *Grundlagen*)

- *“[…]* ***l’essenza della matematica*** *[…]* ***sta proprio nella sua libertà.****”*
- *“[…]* ***la matematica merita – e lo merita essa sola – il nome di libera****, un attributo che, se stesse a me scegliere, io preferirei a quello ormai usuale di pura.”*

“Ma se la matematica ha il diritto di muoversi in piena libertà e senza alcun vincolo metafisico, non posso invece riconoscere lo stesso alla ***«matematica applicata»****”* che è invece priva del *“soffio vivificante del libero pensiero matematico”*.

Due spunti nell'articolo del 1878… e due questioni intricatissime sugli insiemi

- *"Se i due insiemi M e N non hanno uguale potenza, o avranno uguale potenza M e una parte costitutiva di N, o l'avranno N e una parte costitutiva di M"*: verso l'***assioma della scelta***
- Nelle righe finali Cantor congettura che due soltanto sarebbero le potenze dei sottoinsiemi infiniti dei reali, quella numerabile di $\mathbb{N}$ e quella del continuo, cioè dello stesso $\mathbb{R}$: la futura ***ipotesi del continuo***.

Appunto, l’***ipotesi del continuo***:

- continua ad appassionare Cantor, che prova inutilmente a risolverla,
- è inserita da Hilbert al primo posto dei suoi famosi 23 problemi del 1900,
- trova una risposta sorprendente, peraltro non definitiva, nel 1963 grazie a Paul Cohen.

Le antinomie: il *paradosso di Cantor* (lettere a Hilbert del 1897 e a Dedekind del 1899)

- L'unione U di tutti gli insiemi ha la massima cardinalità…
- … ma ci sono insiemi come $\wp(U)$ che hanno cardinalità ancora maggiore.

La pioneristica teoria di Cantor come certe sculture michelangiolesche

- la *Pietà Bardini* di Firenze
- ancor più la *Pietà Rondanini* di Milano

che sembrano suscitare e quasi partorire dalla pietra il capolavoro ancora informe e inespresso.

Con questo ulteriore merito per Cantor: che la sua teoria nasce non dalla pietra e dalla materia, ma soltanto dalla forza del suo genio.

E ancora… lo scienziato come un uomo

- entusiasmo e disperazione,
- genio e follia.

L’esperienza di Cantor, e la crisi degli ultimi decenni di vita

- l’affievolimento della creatività,
- i dubbi e le angosce per la difficoltà dei problemi e delle antinomie da risolvere,
- la voglia di estraniarsi inseguendo interessi filosofici e paraletterari,
- le crisi nervose (l’usura delle ricerche svolte? una predisposizione naturale? le incomprensioni dei colleghi?)

Eppure un'eredità scientifica emozionante

Ancora Borges, *Storia dell'eternità*, *La dottrina dei cicli*: *"Georg Cantor e la sua* ***eroica*** *teoria degli insiemi"*